

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Центральный экономико-математический институт
Российской академии наук

На правах рукописи

Белоусов Федор Анатольевич

**МОДЕЛИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ И
ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ СООБЩЕСТВ С ПРОСТЕЙШЕЙ
СОЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ**

Специальность 08.00.13 – Математические и инструментальные методы
экономики

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата экономических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Бекларян Лева Андреевич

Москва - 2019

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Модель Соле-Манрубиа и её модификации	15
1.1. Модель Соле-Манрубиа. Описание и основные результаты.....	15
1.2. Экономическая модификация модели Соле-Манрубиа.....	20
1.3. Популяционные модификации модели Соле-Манрубиа.....	23
1.3.1 Введение фактора асимметрии.....	26
1.3.2 Введение фактора мести.....	27
Глава 2. Модель общества с однородной социально-экономической структурой. Конкуренция за ограниченный ресурс	31
Глава 3. Модель общества с неоднородной социально-экономической структурой – «кочевники» и «землепашцы»	42
3.1. Модель «кочевников» и «землепашцев». Описание и результаты.....	42
3.2. Модификация модели «кочевников» и «землепашцев» с ограничением на передвижения агентов.....	83
3.3. Исследование модели «кочевников» и «землепашцев» с помощью вейвлет-анализа.....	89
Заключение	104
Литература	108

Введение

Актуальность темы. В истории человечества неоднократно были зафиксированы случаи внезапного и неожиданного полного исчезновения целого социума (государства, племени), либо значительного сокращения численности населения такого социума. Историческими примерами таких событий являются исчезновение племени Майя, гибель цивилизаций Ближнего востока на рубеже XIII-XII веков до н.э. (древние египтяне, вавилоняне, минойцы и микенцы, хетты и др.), исчезновение жителей острова Пасхи и т.д. [34-38]. Причинами исчезновения многих племен, государств и цивилизаций зачастую служат не какие-то внешние негативные природные факторы (хотя и они тоже), а факторы, связанные с социальной напряженностью внутри рассматриваемого общества. Социальная напряженность может проявляться в виде агрессии одних представителей общества по отношению к другим. Результатами подобных явлений могут быть революции, а также различного рода войны, которые могут приводить к заметному сокращению населения. Ярким примером таких событий может послужить революция в России 1917 года и последовавшая за ней гражданская война. Эти события, как известно, привели к огромным человеческим жертвам и резкому падению численности населения в России в первой четверти XX века.

Внутренняя напряженность в обществе также может быть спровоцирована внешними катастрофическими явлениями. Значительные катастрофические события зачастую сопровождаются жертвами среди населения, а также заметными инфраструктурными разрушениями. Все эти факторы в комплексе в некоторых случаях могут приводить к разрушению прежних социальных структур и институтов, что в свою очередь может стать причиной социальной напряженности в рассматриваемом обществе. Последствия такой социальной напряженности и возникающих внутренних конфликтов зачастую сопоставимы или даже превышают последствия самого катастрофического явления. В качестве одного из ярких, относительно недавно произошедших примеров можно привести

ситуацию, которая сложилась после урагана Катрина в США в 2005 году [39]. Помимо массовых человеческих жертв и значительных инфраструктурных разрушений, после данного события было зафиксировано большое количество случаев мародерств опустевших домов, против которых полиция оказалась бессильна. Таким образом все социальные структуры на соответствующей территории были разрушены и, грубо говоря, все общество было поделено на жертв этой катастрофы (они старались покинуть территорию) и тех, кто в результате трагедии желал получить наживу путем грабежа и мародерства.

В силу вышеизложенного, чрезвычайно актуальной является попытка ответить на вопрос почему возможно исчезновение целого сообщества с простой социально-экономической структурой или исчезновение отдельной группы такого сообщества, которая отличается от остальных своей причастностью к процедуре воспроизводства продукта. Предполагается, что такие сообщества могли наблюдаться в далекой древности, либо они могут возникать в современных условиях в силу скажем катаклизмов или еще каких-либо воздействий, результатом которых является разрушение прежних социальных структур и низведение этих структур до простейших структур социальной организации.

Степень разработанности проблемы. Существует достаточно много работ, в которых так или иначе изучаются социально-экономические и демографические вопросы. Первые модели, характеризующие динамику численности популяций описывались при помощи дифференциальных уравнений. Одной из первых нетривиальных работ в этой области видимо является модель, описываемая так называемым логистическим уравнением, которая была опубликована Ферхюльстом еще в 1834 году [29, 30]. В этой модели рассматривается динамика численности некоторой популяции с ограниченным ресурсом. Другой знаковой моделью является модель «хищник-жертва» она же модель Лотки-Вольтерра, опубликованная в середине 20-х годов прошлого столетия, в которой с помощью дифференциальных либо разностных уравнений изучается динамика численности «жертв» и «хищников» [30]. Это направление

развивается и сейчас, о чем более подробно будет сказано чуть ниже. Одновременно с этим, во второй половине XX века постепенное совершенствование компьютерных и информационных технологий дало импульс направлению, получившему название «имитационное моделирование», одной из ветвей которого является агент-ориентированный подход либо агент-ориентированное моделирование. Суть данного подхода заключается в моделировании в рамках компьютерной программы интересующего процесса с целью проведения экспериментов не в реальном, а в виртуальном мире, что дает множество неоспоримых преимуществ. Одной из наиболее известных ранних моделей, которая может быть отнесена к категории имитационных, агент-ориентированных моделей, является модель «жизнь», созданная в 1970 году математиком Джоном Конвеем и представляющая из себя простой клеточный автомат [6]. На данном этапе развития науки имитационное и агент-ориентированное моделирование очень сильно распространены, в частности эти подходы находят свое широкое применение при изучении социально-экономических и демографических процессов.

Одной из знаковых моделей построенной на основе агент-ориентированного подхода, является так называемая «сахарная модель» [7]. С помощью этой модели изучается целый ряд социально-экономических и демографических вопросов, среди которых такие, как войны, торговля, распространение эпидемий, культурный обмен, миграция и пр. Ключевым фактором в модели является некоторый ограниченный ресурс, который носит название «сахар», именно ему модель обязана своим названием. Потребность агентов в данном ресурсе является основным фактором, благодаря которому в рамках модели возникают многие из перечисленных чуть выше явлений в обществе. В некоторых модификациях «сахарной модели» агенты образуют различные группы, которые могут конкурировать между собой вплоть до открытой вражды. Однако правила, по которым в модели происходят такие объединения в группы, обусловлены не

причастностью агентов к способу воспроизводства продукта, а принадлежностью к тому или иному клану или коалиции.

Имеется целый ряд работ, в которых на основе имитационного моделирования исследуются отдельно взятые племена, государства и цивилизации. В качестве примера можно привести статью Скота Хекберта [21], в которой описана модель цивилизации Майя с учетом социально-экологических особенностей. Также можно привести примеры и других моделей среди которых можно отметить модель ранних сельскохозяйственных обществ на юго-западе США [22], либо модель ранних сельскохозяйственных обществ ближнего Востока [23]. Авторы таких моделей стараются учесть климатические и географические особенности территорий, на которых обитали данные сообщества.

Интересной также является работа [24], в рамках которой осуществляется моделирование сосуществования различных сообществ, обитающих на едином ареале. Каждое из сообществ занимает определенную территорию и может характеризоваться либо простой, либо сложной структурой. Структура сообщества может трансформироваться как из простой в сложную, так и обратно. Различные сообщества могут воевать друг с другом, захватывая земли соседей, также при выполнении определенных условий в каждом из них могут происходить гражданские войны, приводящие к разбиению некогда единого сообщества на два независимых. Отличительной особенностью данной модели является то, что агентами в ней являются не люди, либо домохозяйства, а сообщества целиком.

Другим, заслуживающим внимания проектом, является серия моделей, каждая из которых реализована на суперкомпьютере с помощью высокопроизводительной программной среды Пандора [25] в Барселоне. Одной из таких моделей является модель охотников и собирателей (hunter-gather groups), существовавших в северном Гуджарате (Индия) [26]. Другой похожей моделью является модель охотников, рыбаков и собирателей, обитавших в Аргентине и Чили [27]. Создатели приведенных моделей попытались учесть географические и

климатические особенности соответствующих регионов, а их калибровка осуществляется на базе археологических и антропологических данных. Более подробно описанный подход изложен в работе [28].

Другой известный класс моделей, в которых сосуществуют по крайней мере два функционально различных вида агентов, это упомянутая выше модель Лотки-Вольтерра (модель «хищник-жертва») и ее различные модификации, которые в некоторых случаях рассматриваются в экономической интерпретации с конкуренцией фирм за ограниченный рынок сбыта [30-33]. В классической модели «хищник-жертва» «хищники» охотятся за «жертвами», которые являются для них источником пропитания. Описание и исследование этих моделей осуществляется на языке дифференциальных либо разностных уравнений, что предполагает идентичность и неразличимость всех агентов одного вида друг от друга. Также отличительной особенностью данного инструментария является то, что в таких моделях не всегда просто учесть все необходимые ограничения. В этом смысле более выигрышным выглядит агент-ориентированный подход, в рамках которого каждый агент отличим от остальных и имеет свои индивидуальные характеристики (возраст, местоположение и пр.), также этот подход позволяет учесть практически любые ограничения.

Отдельное место в диссертационной работе занимает модель Соле-Манрубиа [4, 5]. В модели изучается вопрос внезапного вымирания большого числа видов живых организмов в результате внутренних причин, эволюционно сложившихся путем благотворного или негативного воздействия одних видов живых организмов на другие. Данная модель интересна тем, что она является очень простой по своей конструкции, но при этом закон распределения, характеризующий количество вымирающих с течением времени видов живых организмов примерно совпадает с тем законом распределения, который получен на основе исторических и археологических данных. В диссертационной работе представлены модификации этой модели, с попыткой перенести ее результаты на

общество, в котором так же как и в исходной модели, между ее представителями устанавливаются положительные и отрицательные взаимосвязи.

Объектом исследования являются общества с простейшей социальной организацией, экономическое взаимодействие в которых основано на конкурентной борьбе его представителей за ограниченный ресурс. Такого типа общества могут наблюдаться как на этапах своего зарождения, так и в посткатастрофических стадиях, когда отдельно взятое общество пережило катастрофу, и практически все его социальные институты и структуры были разрушены.

Предметом исследования являются условия, при которых наблюдается либо вымирание популяции (цивилизации) с простейшей социальной организацией, либо значительное сокращение численности её населения. Также предметом исследования являются условия сосуществования различных типов агентов, отличающихся своей причастностью к процедуре воспроизводства продукта («кочевники» и «землепашцы»).

Цель и задачи исследования. Целью работы является выявление и изучение условий, при которых наблюдается вымирание сообществ с простейшей социальной организацией или значительное сокращение численности населения, а также выявление условий, при которых можно наблюдать сосуществование двух типов сообществ с различным способом воспроизводства продукта («кочевников» и «землепашцев»). Для достижения данной цели необходимо решить следующие задачи:

- Разработка и программная реализация серии имитационных и агент-ориентированных моделей;
- На основе построенных моделей проведение множества экспериментов, наработка базы экспериментальных данных;
- Осуществление эконометрического, статистического и вейвлет-анализа полученных данных;

- Выявление области параметров, при которых наблюдается та или иная качественная динамика каждой из построенных моделей.

Научная новизна исследования состоит в изучении вопросов исчезновения за счет внутренних причин целой популяции либо какой-то ее группы с помощью рассмотрения серии моделей, начиная от самых простых, в которых агенты принимают решения случайным образом, продолжая моделями, в которых агенты принимают более осознанные решения на основе получаемой извне информации, и заканчивая моделями с неоднородной социальной структурой (модель «кочевников» и «землепашцев»), в которой каждый из видов агентов характеризуется своим способом воспроизводства продукта. В отличие от других работ, в которых изучаются древние племена и сообщества [21-23, 26, 27], диссертационная работа построена по принципу «от простого к сложному», другими словами в диссертационной работе строятся сначала самые простые модели, далее на каждом следующем шаге модели постепенно усложняются. Такой подход даёт возможность понять к каким именно изменениям приводит каждое следующее усложнение модели. Если сразу создавать и пытаться изучать сложную модель общества, учитывающую большое количество факторов, то исследование такой модели может оказаться нетривиальной задачей, поскольку многие наблюдаемые в модели явления будут следствием одновременного наложения ряда факторов, степень влияния каждого из которых будет оценить не просто. В данной диссертационной работе нас интересуют наиболее универсальные ответы на вопросы, касающиеся выживания и исчезновения популяций и сообществ без учета второстепенных факторов, к которым можно отнести географические, климатические и прочие особенности.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты могут быть применены в различных научных областях, среди которых экономика, социология, демография и история. Так, с помощью представленных имитационных моделей может быть осуществлен сценарный анализ, который заключается в многократном повторении экспериментов при

различных начальных данных. Такой анализ позволяет предсказать распределение возможных конечных состояний системы в зависимости от начальных состояний. Сценарный анализ может быть востребован как для анализа возможных состояний системы в будущем, так и для анализа событий происходивших в прошлом, о которых к настоящему времени известно крайне мало (например исчезновение тех или иных популяций или цивилизаций, произошедших в древности).

Отметим, что современное общество является гораздо более сложным по своей структуре, чем рассматриваемые в работе общества. Предполагается, что более древние общества могли иметь примерно похожий способ самоорганизации. Как уже было отмечено выше, общества, пережившие катастрофу, также могут обладать схожей структурой. В работе нет привязки к определенным географическим, климатическим или каким либо еще условиям, можно считать, что изучается некоторое абстрактное общество с заданными правилами взаимоотношений его представителей друг с другом.

Методология и методы исследования. Методология исследования в данной диссертационной работе заключается на первом этапе в создании серии имитационных и агент-ориентированных моделей, на втором этапе в проведении множества экспериментов и на третьем в анализе данных, полученных на втором этапе. Основными методами, используемыми в работе являются методы имитационного и агент-ориентированного моделирования, методы математической статистики и эконометрики, а также вейвлет-анализ.

Положения, выносимые на защиту. В работе представлена серия имитационных и агент-ориентированных моделей, а также анализ экспериментальных данных этих моделей. На основе экспериментальных данных произведен качественный анализ рассматриваемых социально-экономических систем. Получены следующие, выносимые на защиту результаты:

- На базе известной модели Соле-Манрубиа, разработана серия имитационных моделей, в которых поведение агентов формируется случайным образом, без учета анализа ситуации. В рамках данных моделей был получен эффект полного вымирания всей популяции;
- На основе модели Соле-Манрубиа представлена её экономическая модификация, в которой роль агентов выполняют не представители какой-либо популяции, а экономические агенты, например фирмы или домохозяйства. В рамках этой модели получена частота разорения агентов, на основе которой можно делать выводы о частоте наступления кризисных явлений в экономике;
- Разработана агент-ориентированная социально-экономическая модель, агенты которой наделены субъектностью в принятии решений, что выражается в том, что решения принимаются не случайным образом, а на основе анализа информации из окружающей среды. Также в модель добавлен ограниченный ресурс, который в некоторых ситуациях провоцирует конкурентную борьбу между агентами. Для данной модели выявлены области параметров, при которых происходит вымирание всей популяции, а также области параметров, при которых популяция существует на обозримых интервалах времени;
- Разработана агент-ориентированная социально-экономическая модель с неоднородной социальной структурой – модель «кочевников» и «землепашцев». Неоднородность выражается в наличии в модели двух типов агентов, каждый из которых характеризуется своим способом воспроизводства продукта. Построены различные модификации данной модели, для каждой из них определены области параметров, при которых наблюдается та или иная качественная динамика. Проведен статистический, эконометрический, а также вейвлет-анализ полученных с помощью модели экспериментальных данных.

Область исследования соответствует требованиям следующих разделов паспорта специальности ВАК 08.00.13 – «Математические и инструментальные методы экономики»:

1. Математические методы:

1.9. «Разработка и развитие математических методов и моделей анализа и прогнозирования развития социально-экономических процессов общественной жизни: демографических процессов, рынка труда и занятости населения, качества жизни населения и др.»

2. Инструментальные средства:

2.1. «Развитие теории, методологии и практики компьютерного эксперимента в социально-экономических исследованиях и задачах управления»

2.2. «Конструирование имитационных моделей как основы экспериментальных машинных комплексов и разработка моделей экспериментальной экономики для анализа деятельности сложных социально-экономических систем и определения эффективных направлений развития социально-экономической и финансовой сфер»

Апробация и внедрение результатов исследования. Основные научные положения и результаты исследования были представлены в Ситуационной комнате ЦЭМИ РАН, а также в рамках симпозиумов и конференций, в т.ч.:

- X Международной конференции «Применение многомерного статистического анализа в экономике и оценке качества», НИУ ВШЭ, ЦЭМИ РАН, 26-28 августа 2014 г.;
- Международная конференция «XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2016), 2016 г.;

- XIII Международной научной конференция «Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование», 7-14 сентября 2016 г.;
- Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Горигорьевича Крейна, 13-19 ноября 2017 г. ;
- IX Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2018), 22-27 октября 2018 г.

Кроме того, материалы данного диссертационного исследования использовались в учебном процессе Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»: в магистерской программе «Бизнес-информатика» Школы бизнес-информатики Факультета бизнеса и менеджмента по дисциплине «Экономико-математическое моделирование», научный семинар «Информационная бизнес-аналитика»; в бакалаврской программе «Бизнес-аналитика» по дисциплинам «Моделирование процессов и систем», научный семинар «Информационная бизнес-аналитика» для студентов 4 курса.

Публикации по теме диссертационного исследования. По теме диссертации опубликовано 11 печатных работ общим объемом 5,5 п.л. (вклад автора – 5,22), из них 4 работы опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени кандидата наук, из них 2 работы опубликованы в издании, индексируемом в базе данных RSCI.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 112 страниц машинописного текста. Список использованной литературы содержит 41 наименований.

В первой главе представлена модель Соле-Манрубия [4, 5], а также ее модификации, в рамках которых наблюдается эффект вымирания популяции.

Отдельно представлена экономическая модель, также являющаяся модификацией модели Соле-Манрубиа.

Во второй главе рассматривается принципиально другая по своей конструкции модель. Если в имитационной модели Соле-Манрубиа и ее модификациях вся динамика реализована с помощью процедур перемножения матриц и векторов, то во второй главе реализована агент-ориентированная модель, в которой агенты обитают и взаимодействуют на ареале. Кроме самих агентов в новую модель вводится некоторый ограниченный ресурс, за который агенты могут развернуть конкурентную борьбу.

В третьей, заключительной главе рассматривается модель «кочевников» и «землепашцев», то есть агенты разделяются на два принципиально разных класса, каждый из которых характеризуется своей причастностью к процедуре воспроизводства продукта. Изучаются различные модификации такой модели, в частности модификация, в которой наложено ограничение на максимально возможную удаленность агентов от места их рождения. Анализ полученных экспериментальным путем модельных данных осуществляется на основе статистических и эконометрических данных. Кроме этого в последнем разделе третьей главы продемонстрирован вейвлет-анализ результатов данной модели.

Глава 1. Модель Соле-Манрубиа и её модификации

1.1. Модель Соле-Манрубиа. Описание и основные результаты

На протяжении истории планеты наблюдается достаточно много случаев одномоментного исчезновения, как большого числа различных видов животных, так и исчезновение лишь нескольких видов. С одной стороны это происходит в результате внешних негативных воздействий таких, как столкновение с метеоритом или астероидом, наступления наводнений или засух, изменения климата и пр. С другой, как показывает анализ археологических раскопок, значительное количество таких исчезновений видов живых организмов может наступать без видимых внешних негативных факторов, за счет сложившейся внутренней самоорганизации между видами [1]. Такое явление на английском языке носит название «self-organized critical phenomena» или «self-organized criticality» [2, 3]. Это явление интересно тем, что согласно археологическим данным исчезновение популяций подчинено закону, близкому к степенному закону распределения. В модели Соле-Манрубиа [4, 5] удалось построить простой механизм, в котором реализуется вымирание большого числа видов живых организмов. Более того такое вымирание подчиняется закону распределения, похожему на степенной закон распределения с характеристиками близкими к известным благодаря археологическим данным.

На первом этапе построим эту модель и продемонстрируем результаты, которые получаются в результате ее работы.

Описание модели

Главной характеристикой состояния системы в модели Соле-Манрубиа является n -мерный вектор Ω , элементы которого могут принимать значения либо 0, либо 1:

$$\Omega = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$.

Если $x_i = 0$, то вид i живых организмов вымер, если $x_i = 1$, то данный вид считается живым. Из периода в период состояние системы меняется – в начале каждого момента времени все n видов организмов живы, затем происходит некоторое межвидовое взаимодействие, в результате которого к концу периода часть видов исчезает. В конце каждого периода k состояние системы фиксируется и обозначается как Ω^k . Интерес представляет динамика такого вектора Ω^k , а именно количество ненулевых элементов данного вектора в каждый момент времени.

Опишем алгоритм межвидового взаимодействия. Для этого в рассмотрение вводится $(n \times n)$ -матрица перехода M^k , которая в нулевой момент времени совпадает с единичной матрицей. В период времени k матрица M^k получается из M^{k-1} путем замены в каждой строке этой матрицы случайно выбранного одного элемента, не лежащего на диагонали, на реализацию равномерно распределенной случайной величины. Так, матрица M^1 примет вид

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \alpha_{1,j_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \cdots & \alpha_{2,j_2} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{n,j_n} & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

где для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ случайным образом, равновероятно из множества $\{1, \dots, n\}$ выбирается целое значение j_i . Далее, для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ выбираются числа $\alpha_{i,j_i} \sim U(-1,1)$, где $U(-1,1)$ - равномерное распределение в диапазоне $(-1,1)$.

Полученная матрица умножается справа на единичный вектор размерности n в результате чего получается вектор ω^k , $\omega^k = M^k \cdot (1, 1, \dots, 1)'$. Вектор Ω^{k+1} получается из вектора ω^k по следующему правилу

$$\Omega_j^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega_j^k > 0; \\ 0, & \text{если } \omega_j^k \leq 0. \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

Таким образом с помощью этой операции определяются выжившие виды и виды, которым суждено исчезнуть. После этого случайным равновероятным образом выбирается один из выживших видов j и для всех видов i , которые в данный период не выжили в матрице M^k осуществляется замена

$$M_{iq}^k = M_{jq}^k + \eta_{iq}, \quad q = 1, \dots, n,$$

$$M_{qi}^k = M_{qj}^k + \eta_{qi}, \quad q = 1, \dots, n,$$

где η_{iq} – случайные равномерно распределенные величины в пределах от -0,01 до 0,01 ($U(-0,01, 0,01)$). Далее алгоритм повторяется для следующего момента времени. В первые периоды работы модели система эволюционирует, в частности матрица M^k все больше и больше заполняется новыми элементами и с каждым шагом менее напоминает единичную матрицу, после этого система приходит в некоторое устойчивое состояние. В связи с этим учет результатов работы модели начинается только после первых 10000 периодов, когда модель заведомо перешла в устойчивое состояние.

Таким образом элемент M_{ij}^{k-1} матрицы M^k , $k = 1, 2, \dots$ характеризует воздействие в k -й период агента j на агента i . Если $M_{ij}^{k-1} > 0$, то воздействие на агента i положительно, если $M_{ij}^{k-1} < 0$, то воздействие отрицательно. Итоговое воздействие на агента i в k -й период определяется по формуле $\sum_{j=1}^n M_{ij}^k$. Формально итоговое воздействие на агента i это произведение i -й строки матрицы M^k на вектор состояний Ω^k . Если это произведение больше 0, то вид либо выживает, либо рождается. Если произведение меньше либо равно нулю, то вид считается вымершим.

Приведенный алгоритм преобразования матрицы M^{k-1} в матрицу M^k означает в частности, что в каждой последующий момент времени изменение

воздействия на некоторый вид $i \in \{1, \dots, n\}$ со стороны другого, случайно выбранного вида j_i осуществляется на случайную величину α_{i,j_i} .

Результаты

Опишем результаты, которые получились в процессе численных экспериментов. Максимальное количество видов выберем равным $n = 100$, число периодов возьмем $T = 100000$. На рисунке 1 приведена динамика, показывающая сколько видов особей погибает в каждый из периодов.

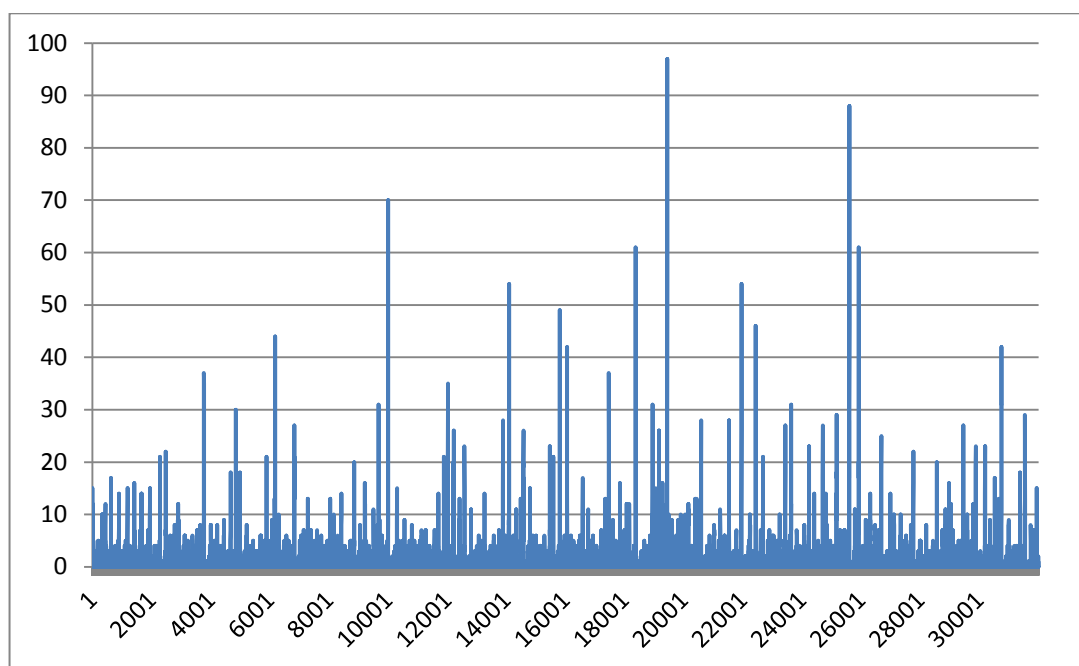


Рисунок 1.1. Динамика исчезновений видов организмов.

Для анализа полученных результатов используем показатель характеризующий частоту вымирания видов в каждый из периодов $H(s)$, т.е. в рамках этого показателя будет посчитано сколько раз наблюдалось вымирания одного вида, сколько раз наблюдалось исчезновение двух видов и так далее до n .

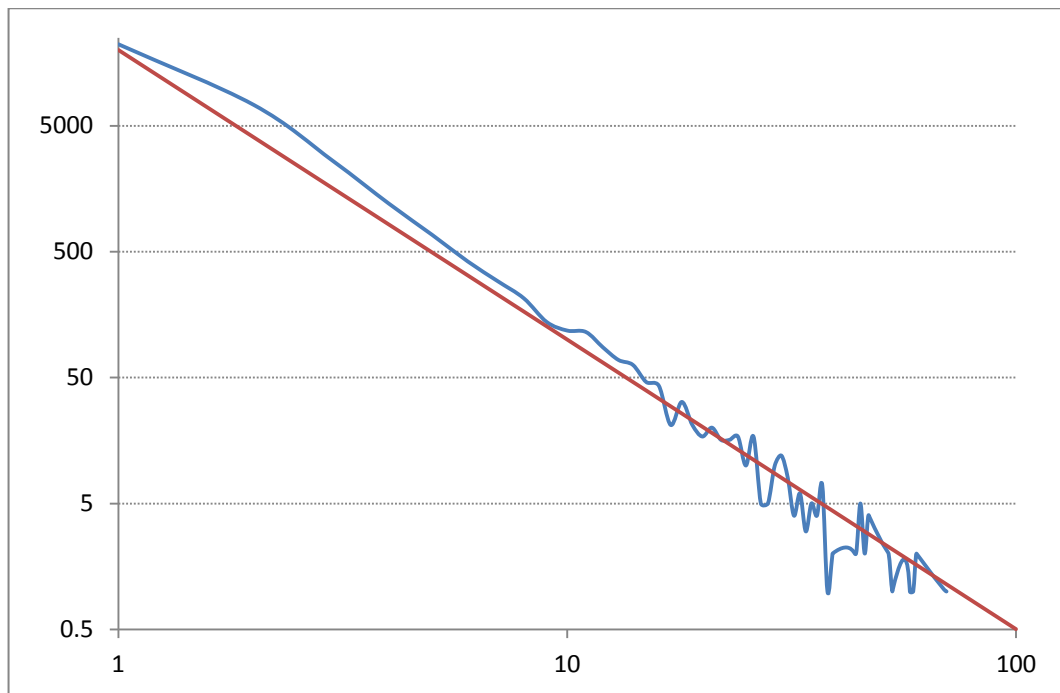


Рисунок 1.2. Частота вымирания видов $H(s)$ (синяя линия), степенная функции (красная прямая линия) с показателем $-2,3$ ($N(s) \propto s^{-\alpha}$, $\alpha = 2,3$). График представлен в логарифмических шкалах.

Из графика видно, что частота вымирания видов близка по своему распределению к степенному закону с показателем $-2,3$. Однако хвост распределения данного показателя под степенное распределение подходит хуже.

Благодаря представленной модели видно, что для катастрофического исчезновения большого числа видов живых организмов не обязательно должна происходить глобальная катастрофа (столкновение с метеоритом, изменение климата, наводнение, извержение вулкана и пр.), такое исчезновение может произойти как бы само собой за счет одновременного наложения нескольких негативных факторов, каждый из которых сам по себе не представляет серьезной угрозы.

1.2. Экономическая модификация модели Соле-Манрубия

Введение

Как уже было отмечено, исходная модель Соле-Манрубия интересна тем, что в ней катастрофическая гибель агентов происходит не за счет каких-то внешних факторов, а за счет внутренних причин, связанных с характером взаимодействия агентов друг с другом. Логично предположить, что и в экономических системах могут происходить кризисы, связанные с массовым разорением экономических агентов не из-за внешних негативных факторов, а за счет сформировавшейся с течением времени структуры взаимоотношений представителей рассматриваемой экономической системы. В данной модификации представлена модель игры с нулевой суммой, которая может быть интерпретирована как модель товарно-денежных отношений между экономическими субъектами, такими как фирмы и домохозяйства.

Описание модели

Введем некоторые изменения в исходную модель Соле-Манрубия. Будем предполагать, что каждая ячейка вектора Ω соответствует одному экономическому агенту (фирме или домохозяйству). На экономические взаимоотношения можно посмотреть как на игру с нулевой суммой в том смысле, что в процессе товарно-денежного обмена одна сторона получает товар, другая деньги в виде платы за данный товар. Таким образом, если учитывать только денежные потоки, опуская товарные потоки, в момент совершения сделки количество денег у одного контрагента увеличивается ровно на столько, на сколько уменьшится состояние счета у второго контрагента (участие третьих, посреднических сторон учитывать не будем). Внесем такие изменения в модель Соле-Манрубия, чтобы новая модель в динамике развивалась как модель игры с нулевой суммой. Для этого скорректируем алгоритм формирования матрицы M , а именно, для каждой строки $i \in \{1, \dots, n\}$ равномерным случайным образом выбирается элемент j_i из интервала $\{1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n\}$, т.е. в каждой строке

можно выбрать любой элемент за исключением диагонального. После этого элементы α_{i,j_i} матрицы M будут выбираться в соответствии с законом распределения $\alpha_{i,j_i} \sim U(-0,1; 0,1)$, $i = \overline{1, n}$. Далее, с добавлением каждого такого элемента в матрице добавляется симметричный элемент по правилу $\alpha_{j_i,i} = -\alpha_{i,j_i}$. Вектор Ω^k формируется так же. Интерпретация элементов этого вектора следующая – если $\Omega_j^k = 1$, то агент j на данный момент находится в «плюсе», то есть в данный период выручка данного экономического субъекта превышает его расходы, если $\Omega_j^k = 0$, то j -й агент считается разорившимся. Если какое-то количество экономических субъектов разорилось, то случайным образом выбирается успешный, не разорившийся агент и на место разорившихся встают другие, которые с наибольшими изменениями копируют поведение выбранного успешного агента. В модифицированной модели это формализовано практически также как и в исходной модели Соле-Манрубиа, однако тут тоже необходимо принять некоторые изменения. И так, если агент i разорился, а агент j оказался случайно выбранным успешным на данный момент агентом, тогда новый агент i выбирает стратегию похожую на стратегию, которую использует j следующим образом

$$M_{iq}^k = M_{jq}^k + \eta_{iq}, \quad M_{qi}^k = -M_{iq}^k,$$

$$M_{ji}^k = M_{ij}^k = 0, \quad M_{ii}^k = 1, \quad q = 1, \dots, n,$$

где $\eta_{qi} \sim U(-0,01, 0,01)$. Соотношение $M_{qi}^k = -M_{iq}^k$ требуется для того, чтобы модель была игрой с нулевой суммой. Соотношение $M_{ji}^k = M_{ij}^k = 0$ говорит о том, что в момент своего появления агент i не зарабатывает на своем учителе, агенте j , ровно как и j не зарабатывает на i . Последнее соотношение $M_{ii}^k = 1$ означает, что на свое состояние агент влияет всегда с весом 1, другими словами агент i может обогащаться или терять свои средства за счет других агентов, но не за счет самого себя.

В остальном модифицированная модель идентична модели Соле-Манрубиа.

Таким образом данная экономическая модель характеризует количество агентов, которые разоряются в каждый момент времени. Проанализируем результаты модели.

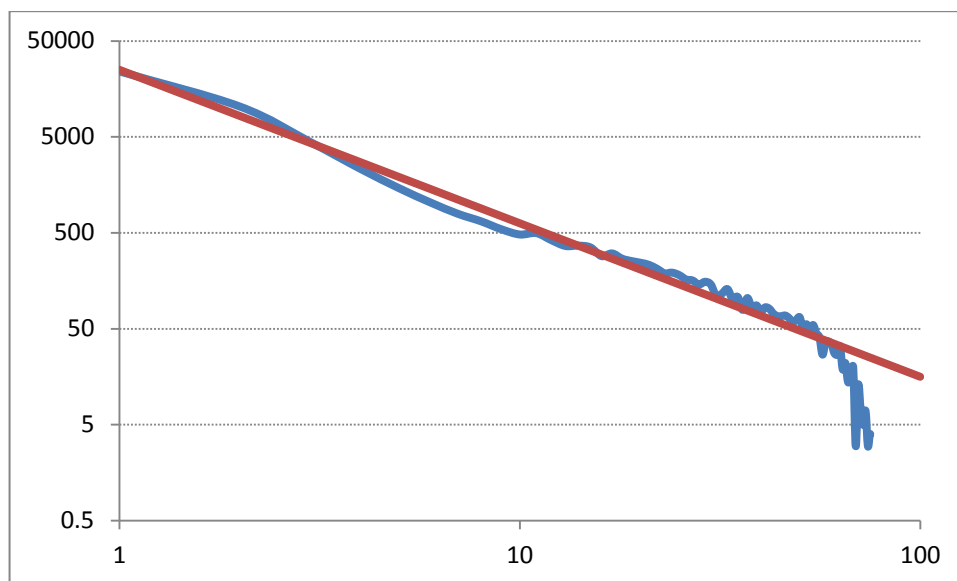


Рисунок 1.3. Частота разорения агентов $N(s)$ (синяя линия), степенная функции (красная прямая линия) с показателем $-1,6$ ($N(s) \propto s^{-\alpha}$, $\alpha = 1,6$). График представлен в логарифмических шкалах.

Видно, что частота разорения агентов близка по своему распределению к степенному закону с показателем $-1,6$, однако ближе к 100 по оси абсцисс частота разорения этому закону не подчиняется.

Выводы

Рассмотренная модификация модели Соле-Монрубиа может подойти и для моделирования фондового рынка, роль агентов в которой будут выполнять инвесторы, играющие на фондовом рынке.

Понятно, что данная модель не во всех аспектах адекватно описывает реальность. Одна из основных претензий к модели это то, что она не допускает воздействия внешних факторов, которые в любой экономической системе всегда присутствуют (в частности внутренняя и внешняя политика). Однако эта модель подсказывает, что не всегда кризисы в экономике и в частности на площадках

финансовых рынков могут быть вызваны внешними воздействиями, они могут быть следствием внутренней самоорганизацией рассматриваемой экономической системы.

1.3. Популяционные модификации модели Соле-Манрубия

В этом разделе будет рассмотрена модификация модели Соле-Манрубия, целью которой является добиться того, чтобы в какой-то момент можно было наблюдать вымирание всех живых организмов. Здесь мы немного поменяем интерпретацию элементов вектора Ω , а именно будем считать, что каждый элемент данного вектора – это одна особь некоторой популяции. Таким образом количество особей рассматриваемой популяции не сможет превышать размерность вектора Ω .

Описание модели

Модель будет модифицирована по двум направлениям. Во-первых, будет добавлена асимметрия во взаимоотношениях, то есть негативного влияния агентов друг на друга будет больше чем положительного. Второе, будет немного изменено правило перехода от вектора Ω^k к вектору Ω^{k+1} .

В новой модификации, так же как и в исходной модели, основным показателем, характеризующим состояние системы, является вектор Ω^k . Однако в отличие от исходной модели Соле-Манрубия количество агентов в предыдущий период (количество единичных элементов в векторе Ω^{k-1}) будет на прямую влиять на количество агентов в текущем периоде. Выражается это в том, что если в исходной модели промежуточный вектор ω^k получался умножением матрицы M^k на вектор состоящий из единиц, то сейчас этот показатель будет высчитываться по формуле

$$\omega^k = M^k \cdot \Omega^k$$

Тогда вектор состояний Ω^{k+1} будет определяться по правилу

$$\Omega_j^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega_j^k > 0; \\ 0, & \text{если } \omega_j^k \leq 0. \end{cases}$$

Таким образом, как и в исходной модели, элемент M_{ij}^k матрицы M^k , $k \in N$ характеризует воздействие агента j на агента i в период времени k . Если $M_{ij}^k > 0$, то такое воздействие положительно, если $M_{ij}^k < 0$, то воздействие отрицательно. Итоговое воздействие на агента i определяется формулой $\sum_{j=1}^n M_{ij}^k \cdot \Omega_j^k$, т.е. итоговое воздействие на агента i это произведение i -й строки матрицы M^k на вектор состояний Ω^k . Если это произведение больше 0, то агент либо выживает, либо рождается. В противном случае особь считается мертвой.

Алгоритм перехода из матрицы M^{k-1} к матрице M^k в данной модификации остается таким же, как и в исходной модели Соле-Манрубиа. Дополнительным упрощением является то, что при гибели агентов процедуры замены их копией одного из выживших агентов в данном случае не будет.

Таким образом, как и в исходной модели Соле-Манрубиа преобразование матрицы M^{k-1} в матрицу M^k означает, что в каждой последующий момент времени изменение воздействия на некоторого агента $i \in \{1, \dots, n\}$ со стороны другого, случайно выбранного агента j_i осуществляется на случайную величину α_{i,j_i} .

Введем понятие устоявшегося режима. Устоявшимся режимом или, что тоже самое, равновесным состоянием будет называться такое состояние системы, при котором количество агентов варьируется вокруг некоторого постоянного значения.

Результаты

Был проведен ряд численных экспериментов новой модели. Динамика, которую демонстрирует данная модель от динамики в модели Соле-Манрубиа. В рамках рассматриваемой модели, при достаточно большом значении

максимального количества особей (т.е. при достаточно большом значении параметра n), наблюдается вымирание какой-то части популяции после чего система приходит в равновесное состояние. На рисунках 1.4 и 1.5 приведены график динамики популяции для случая $n = 100$ на протяжении $T = 10000$ периодов.

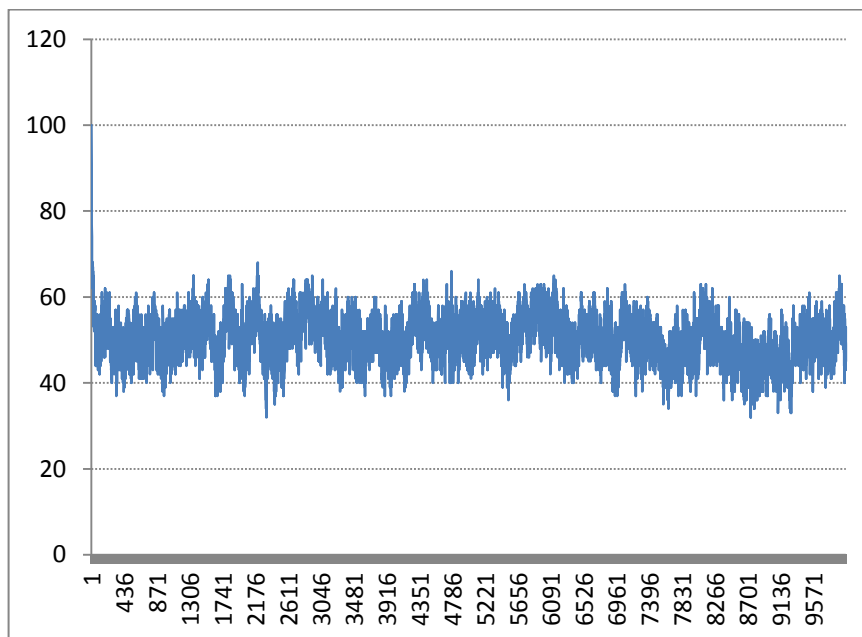


Рисунок 1.4. Динамика популяции в случае $n = 100$, $T = 10000$.

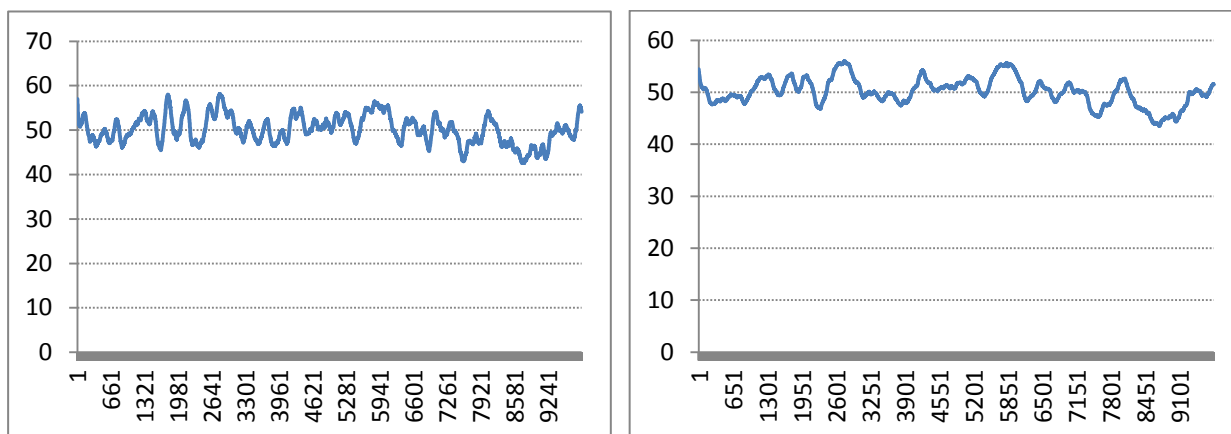


Рисунок 1.5. Динамика популяции в случае $n = 100$, $T = 10000$, усреднение за 100 периодов (левый график), усреднение за 250 (правый график).

1.3.1. Введение фактора асимметрии

Попробуем модифицировать модель так, чтобы можно было наблюдать эффект вымирания всей популяции. По сравнению с исходной моделью Соле-Манруба, в процедуре перехода от матрицы M^{k-1} к матрице M^k внесем некоторые изменения, а именно изменим закон распределения величины α_{ij} , в данной модификации эта величина будет распределена по закону распределения $U(-1, a)$, где $a \leq 1$. Уменьшим значение параметра a настолько, чтобы добиться исчезновения популяции за наблюдаемый интервал времени. Экспериментально было получено, что максимальное значение данного параметра, при котором наблюдается эффект вымирания равно $a = 0,74$. Ниже приведен один из экспериментов, в котором наблюдается исчезновение популяции.

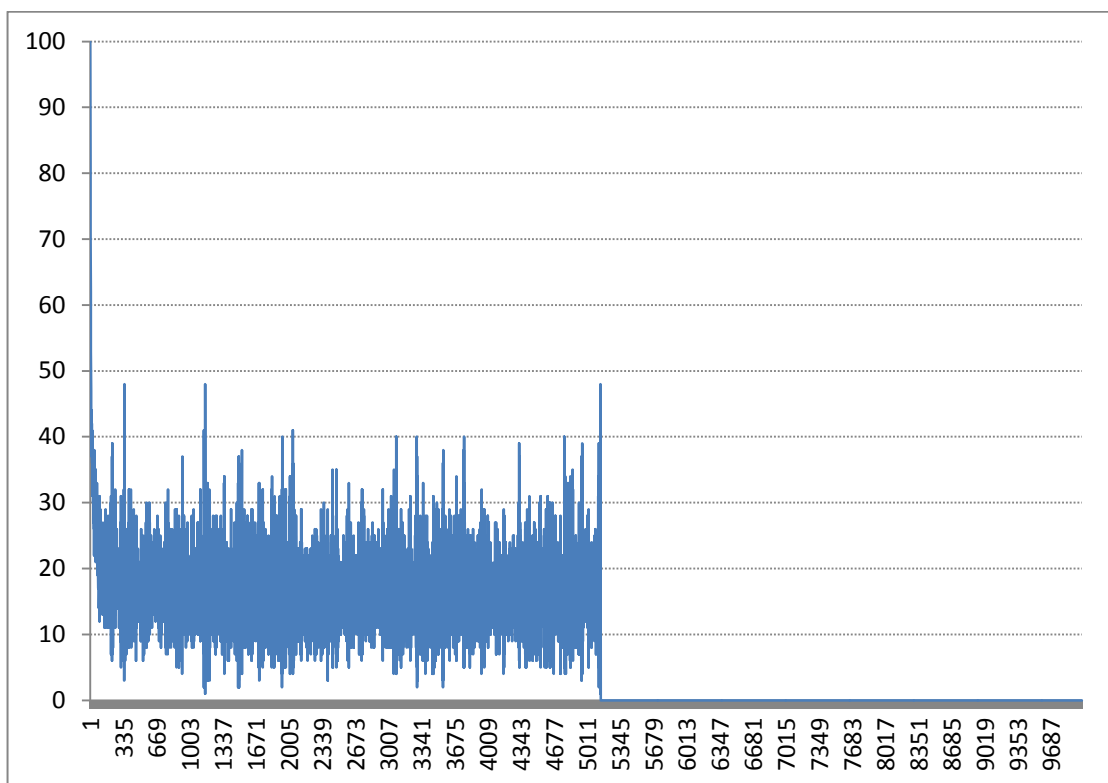


Рисунок 1.6. Динамика популяции в случае асимметрии ($a = 0,74$), $n = 100$, $T = 10000$.

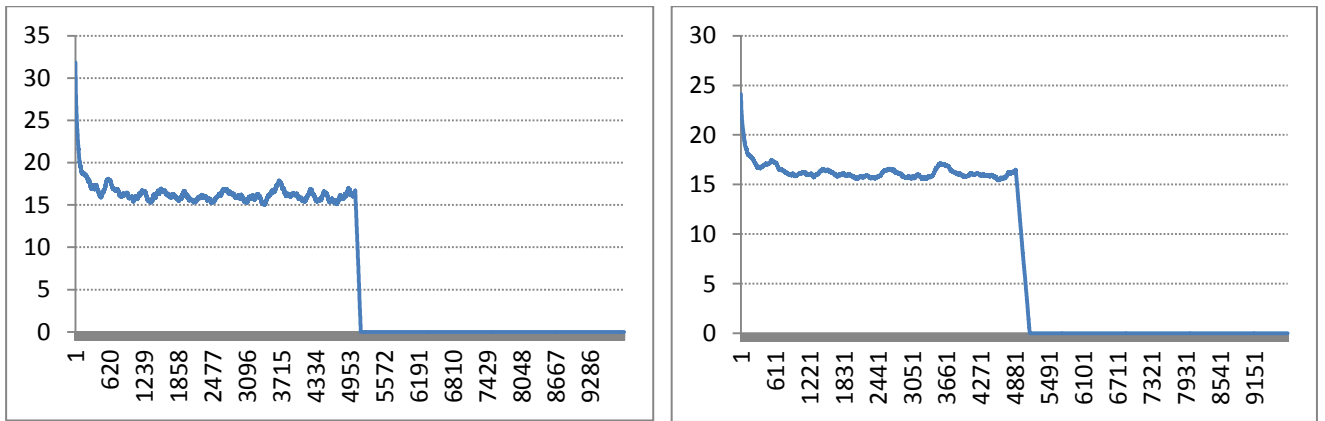


Рисунок 1.7. Динамика популяции в случае ассиметрии ($a = 0,74$), $n = 100$, $T = 10000$, усреднение за 100 периодов (левый график), усреднение за 250 (правый график).

Из приведенной модификации модели видно, что одним из способов реализации эффекта исчезновения популяции является введение ассиметрии во взаимоотношения между агентами путем уменьшения количества положительного воздействия по сравнению с негативным воздействием.

1.3.2. Введение фактора мести.

В новой модификации модели агентам дается возможность отвечать другим агентам на негативное воздействие в свою сторону. Формально это выражается в том, что алгоритм перехода от матрицы M^{k-1} к матрице M^k будут внесены некоторые изменения. Как и в исходной модели Соле-Манрубия, в каждой строке i матрицы M^{k-1} случайным, равномерным способом выбирается целочисленное значение $j \in \{1, \dots, n\}$ и на место соответствующего элемента в матрице M^k помещается случайно распределенный элемент $\alpha_{i,j_i} \sim U(-1,1)$. Нововведением в алгоритме формирования матрицы M^k является то, что если элемент $M_{ij_i}^k = \alpha_{i,j_i} < 0$, то на место симметричного элемента $M_{j_i i}^k$ помещается случайная величина $\alpha_{j_i i}$, распределенная по закону $U(-1,0)$. Другими словами, если один агент оказал на другого негативное воздействие, то первый агент также ответит ему негативным воздействием. То есть по факту это явление может быть охарактеризовано как

проявление фактора мести за нанесение ущерба со стороны другого агента. Приведем численный эксперимент данной модификации модели.

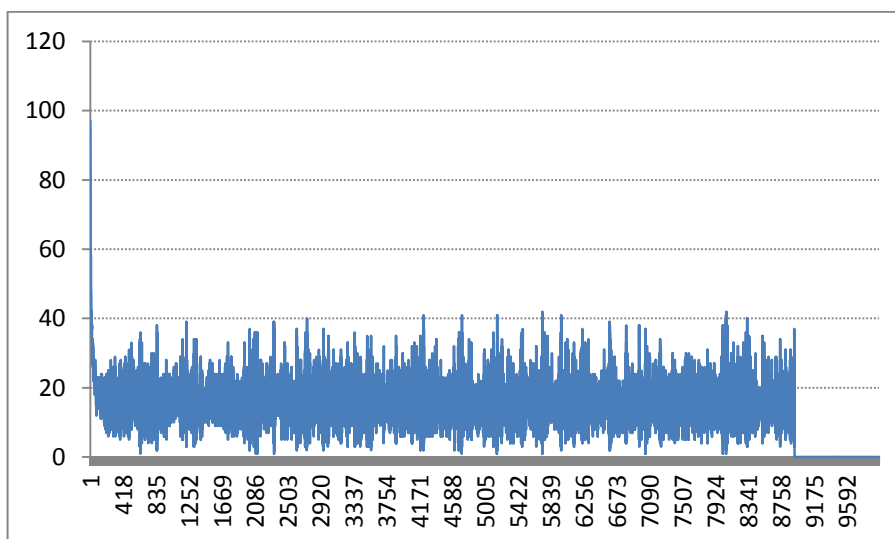


Рисунок 1.8. Динамика популяции в случае наличия фактора мести $n = 100$, $T = 10000$.

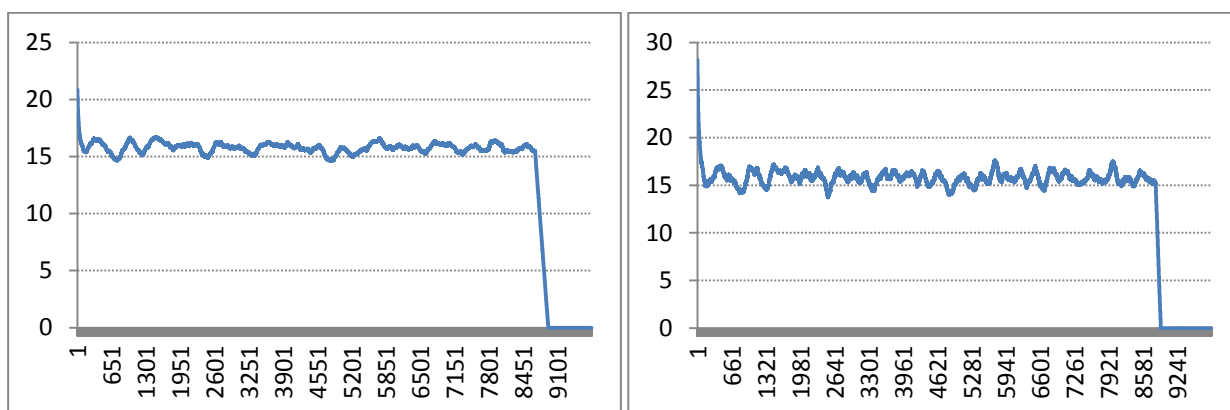


Рисунок 1.9. Динамика популяции в случае наличия фактора мести, $n = 100$, $T = 10000$, усреднение за 100 периодов (левый график), усреднение за 250 (правый график).

Экспериментально было получено, что в среднем в модели с фактором мести популяции живут меньше чем популяции с асимметрией во взаимоотношениях. Кроме этого, в модели с фактором мести, по сравнению со случаем наличия асимметрии, количество особей в популяции быстрее приходит к равновесному уровню.

Представленные модификации модели Соле-Манрубия имеют также и экономическую интерпретацию. Этому посвящена отдельная статья [11]. В такой интерпретации роль агентов выполняют фирмы, которые функционируют в одном экономическом пространстве. Гибель агента означает разорение фирмы. Соответственно положительное влияние некоторой фирмы А на фирму Б означает, что благодаря фирме А фирма Б получает дополнительный доход, если влияние отрицательное, то из-за фирмы А фирма Б терпит расходы (например осуществляет у нее закупки или они являются конкурентами на рынке). В такой интерпретации из модели видно, что в случае отсутствия асимметрии в экономике существует некоторый равновесный уровень и численность фирм колеблется вокруг этого уровня. В случае же наличия асимметрии в экономике могут наблюдаться кризисы, которые выражаются в одновременном разорении большинства фирм в экономике.

Выводы

Экспериментально было показано, что в исходной модели Соле-Манрубия численность особей достаточно быстро достигает некоторого равновесного состояния и отсутствует эффект полного исчезновения. Для получения данного эффекта вводится асимметрия во взаимоотношениях между агентами так, чтобы негативного внутрепопуляционного влияния было больше чем положительного. Таким образом, общий вывод данной главы согласуется с интуицией – чем более агрессивно агенты действуют по отношению друг к другу, тем с большей вероятностью будет наблюдаться вымирание популяции. Также верно обратное – преобладание благотворного влияния особей друг на друга, снижает вероятность исчезновения популяции.

Важной отличительной чертой рассмотренной модели является то, что взаимоотношения особей друг с другом определяются экзогенно на основе реакции типа «инстинкт». В моделях, которые представлены в главах 2 и 3 правила формирования взаимодействий агентов друг с другом будут определяться эндогенно с помощью реакции с элементами "этики". В основе этих правил будут

два инстинкта – инстинкт размножения и инстинкт выживания, который активизируется в случае, если агент долго не потреблял пищу.

Можно провести аналогии между моделью Соле-Манрубиа и одной из возможных причин гибели цивилизаций Ближнего Востока в XIII-XII веках до н.э. Так, в исходной модели Соле-Манрубиа катастрофическое падение численности популяции происходит в результате одновременного наложения нескольких негативных событий, каждый из которых само по себе не несет большой угрозы для всей популяции. Другими словами, в такие моменты происходит что-то вроде резонансного наложения событий, эффект от которых складывается так, что в результате наблюдается катастрофическое снижение численности популяции. Тут может быть применена некоторая аналогия с известным в океанологии эффектом, который носит название «девятый вал», при котором огромная разрушительная волна возникает как будто из неоткуда. На самом деле она является следствием резонансного наложения нескольких относительно небольших волн. Такие волны еще называют «волны-убийцы», они возникают в мировом океане и, достигая огромных размеров (до 60 метров), способны пустить на дно практически любое современное судно. В чем то похожая ситуация могла сложиться в конце бронзового века, когда можно было наблюдать гибель цивилизаций Ближнего Востока и восточного средиземноморья. В соответствии с одной из гипотез, представленной в работе [38], рассматриваемая катастрофа могла произойти не в следствии того, что наблюдалось какое-то одно негативное событие, среди которых могли быть тектоническая активность, засуха, миграция и набеги, нарушения торговых связей, изменения способов ведения войны и пр., а в результате того, что все эти события могли произойти практически одновременно. Понятно, что какие-то из них могли быть следствием других, но суть выдвигаемой гипотезы как раз в одновременном наложении нескольких таких событий независимо друг от друга. Хотя с каждым из указанных событий в отдельности цивилизации были способны справиться, однако одновременное наложение этих событий привело к катастрофическим последствиям для них.

Глава 2. Модель общества с однородной социально-экономической структурой. Конкуренция за ограниченный ресурс.

Введение

В модели Соле-Манрубия и ее модификациях взаимоотношения агентов друг с другом определяется экзогенно. То есть в рамках данной модели и ее модификациях не определено по какой причине одна особь воздействует агрессивно по отношению к другой, или почему такое воздействие оказалось благотворным. Таким образом, в указанных моделях все подобные взаимодействия формируются случайным образом. В данной главе представлена новая модель, в которой характер взаимодействия между агентами будет определяться эндогенно. Достигаться это будет за счет добавления в модель некоторого ресурса, который доступен агентам в ограниченном объеме, и недостаточное количество которого может провоцировать агентов на агрессивные действия в отношении друг друга.

Программный код данной модели был написан на языке Visual Basic, эксперименты осуществлялись в программном продукте Excel.

Описание модели

В новой модели, в отличие от моделей типа Соле-Манрубия, появляется пространственная составляющая, агенты будут перемещаться по ареалу квадратной формы и взаимодействовать с соседними агентами. Одной из наиболее важных характеристик модели является размер каждой из сторон квадратного поля - *dim*. Поле ареала является дискретным, каждая клетка этого поля может быть либо пустой, либо там может находиться агент, либо в ней может появиться ресурс. Ресурс в любой пустой клетки может возникнуть с некоторой вероятностью, которая является экзогенной величиной. Если отдельно взятая клетка пуста, то ее значение маркеруется нулем, если в клетке возникает ресурс, то ее значение становится равным «-2», если в клетке расположен агент,

то значение клетки становится равным одной из его характеристик, которая характеризует текущему уровню здоровья данного агента.

Характеристики и правила поведения агентов

Время в модели дискретно, агенты осуществляют свои действия пошагово. Очередность ходов у агентов определяется по старшинству – кто старше, тот ходит раньше. Двигаться особи могут в любом направлении на любую соседнюю клетку, не занятую другим агентом. В алгоритме поведения агентов присутствуют два основных инстинкта – первый инстинкт продолжения рода, второй инстинкт выживания. В каждый момент времени в сознании агента может доминировать только один из инстинктов. Если агент потребляла ресурс в течении менее пяти периодов, то в его сознании преобладает инстинкт продолжения рода и он в большей степени занят поиском партнера, с которым можно зачать и родить еще одного агента. Инстинкт выживания в этом случае в сознании агента второстепенен и активизируется, только если рядом нет других особей. Если агент голоден, то есть не ел пять периодов или больше, то в этом случае инстинкт продолжения рода отключается, активен только инстинкт выживания. В этом случае единственной задачей для агента является поиск свободного ресурса, который он может потребить.

В каждый момент времени, если особь не потребляла ресурс и не участвовала в рождении другого агента, то уровень здоровья данной особи уменьшается на одну единицу. Если агент съел ресурс, то уровень его здоровья вырастит на две единицы. Если два агента участвовавших в процессе рождения третьей особи, то у этих двух агентов уровень здоровья снижается на 1,5 единицы.

Установим также максимально возможный возраст агентов на уровне 40 периодов. По достижению этого срока смерть будет наступать вне зависимости от остальных параметров агента. Также смерть может наступить в случае, если уровень здоровья опустился до нулевого уровня.

Правила взаимоотношений между агентами

В данной главе будет рассмотрено две модели – в первой агенты не умеют действовать агрессивно по отношению к другим агентам, во второй агенты имеют возможность атаковать других агентов. На рисунках 2.1 и 2.2 в виде блок-схем показаны алгоритмы поведения агентов для каждой из моделей. Отметим, что если первый агент проявляет агрессию по отношению ко второму агенту то второй агент погибает. Таким образом, в модели с агрессивными представителями популяции агенты либо стремятся к размножению, если они сыты, либо действуют агрессивно и убивают своих оппонентов, если они голодны. Дополнительно установим ограничение – два агента могут зачать и родить ребенка, только если до этого более 5 периодов они оба не участвовали в процессе размножения. В первый период рождения нового агента перемещаться по ареалу он не может. Также, в начальный момент времени новой особи дается некоторый уровень здоровья, эта величина является экзогенным параметром модели, для всех новорожденных особей значение этого параметра одинаково.

Алгоритм возникновения ресурса на ареале

В каждый момент времени интенсивность появления ресурса одинакова. Появление ресурса в каждой из клеток определяется вероятностно. Такая интенсивность является заданной, экзогенным параметром модели. Во всех приведенных ниже экспериментах вероятность появления ресурса в любой пустой клетке будет равна 0,04.

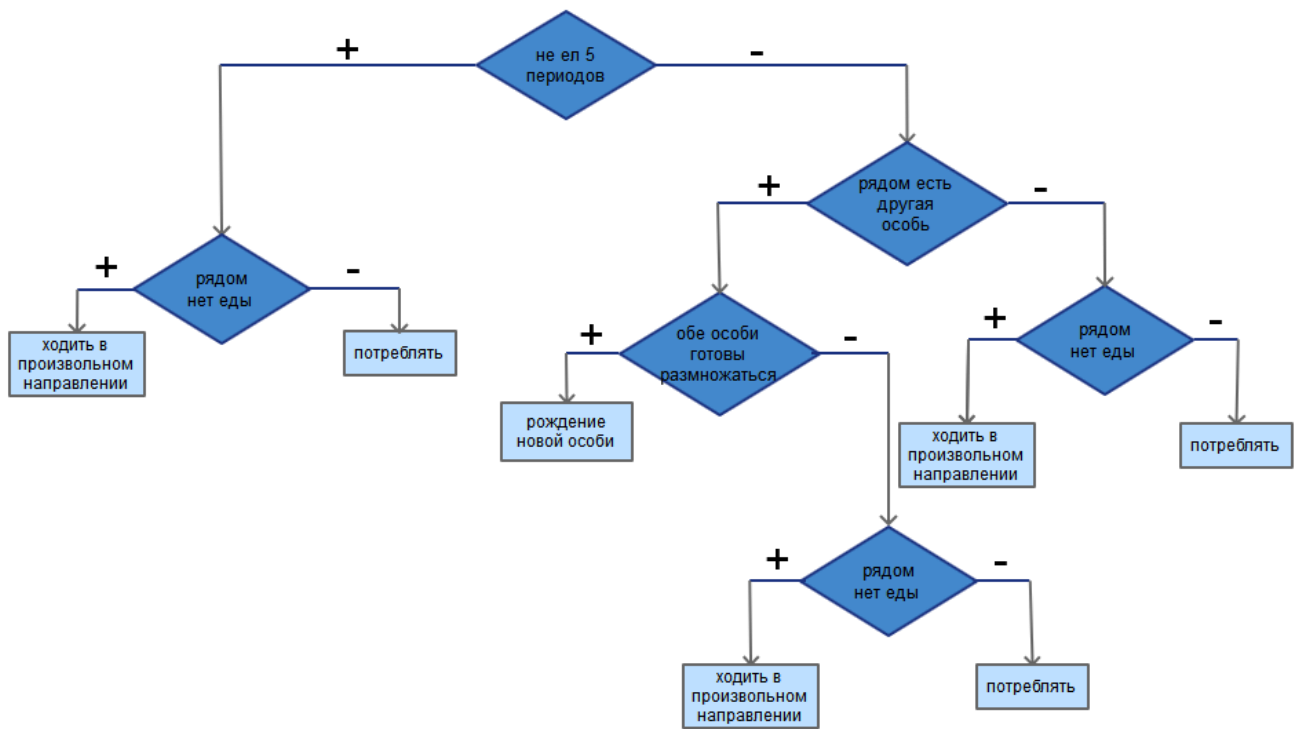


Рисунок 2.1. Алгоритма поведения агентов для модели без агрессии

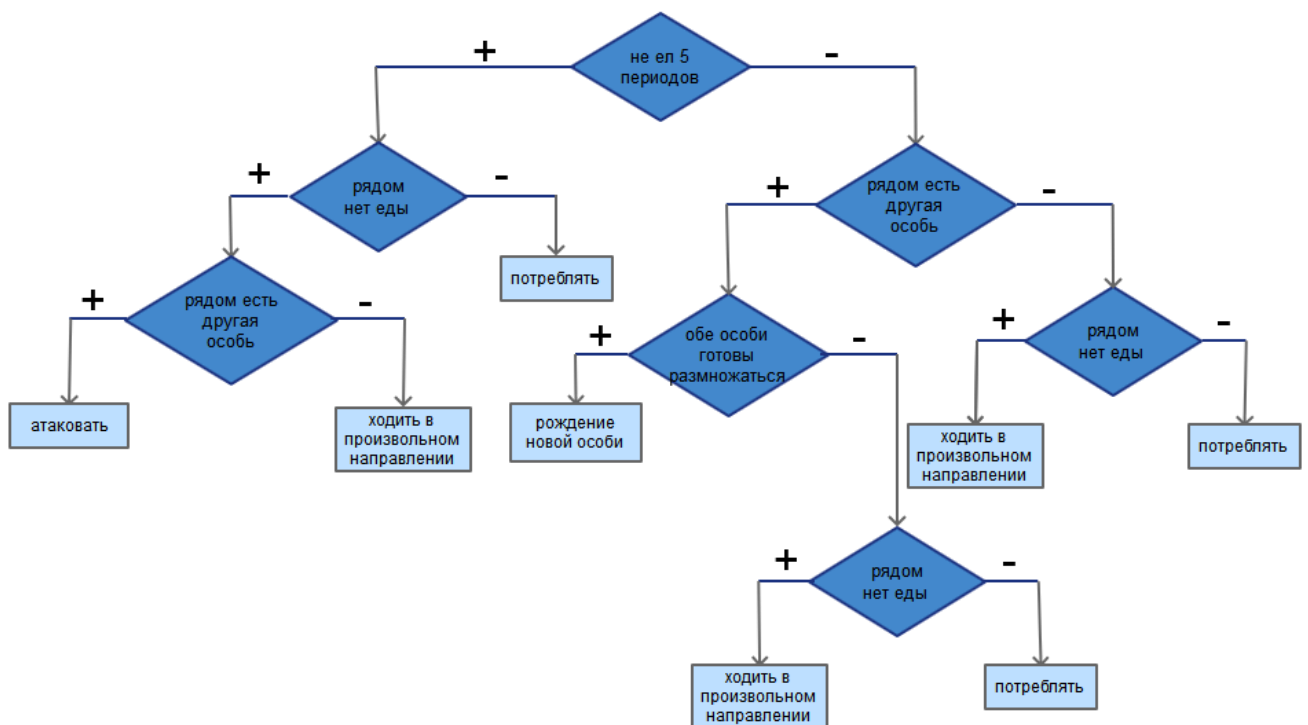


Рисунок 2.2. Алгоритма поведения агентов для модели с агрессией.

Список ключевых параметров модели:

- Размеры ареала (*dim*)
- Начальный уровень здоровья
- Агрессивные/не агрессивные агенты
- Вероятность появления ресурса в пустой клетке (во всех экспериментах будет равно 0,04)
- Количество периодов, после которого агент переходит в состояние голоден (5 периодов)
- Максимальный возраст особи (40 периодов)
- Количество периодов, после которого агент готов к продолжению рода
- Численность популяции в начальный момент времени

Нас будет интересовать влияние первых трех пунктов приведенного списка. Также можно заметить, что уровень начальной численности популяции может быть отнесен к одному из двух случаев. В первом случае численность относительно невелика, тогда популяция достаточно быстро исчезает из-за того, что агенты слишком сильно разбросаны по ареалу и не успевают в рамках своей жизни воспроизвести достаточное количество потомства. Во втором случае количество особей в начальный момент времени находится на приемлемом уровне, тогда численность приходит к некоторому равновесному значению, которое уже не зависит от первоначального количества агентов.

Сопоставление агрессивного и неагрессивного поведения агентов

При прочих равных, сравним динамику численности популяции в случаях, когда агенты могут проявлять агрессию и когда такой возможности у них нет. Положим *dim* равным 10, начальный уровень здоровья будет на уровне 20. Результаты экспериментов приведены на рисунках 2.2 и 2.3.

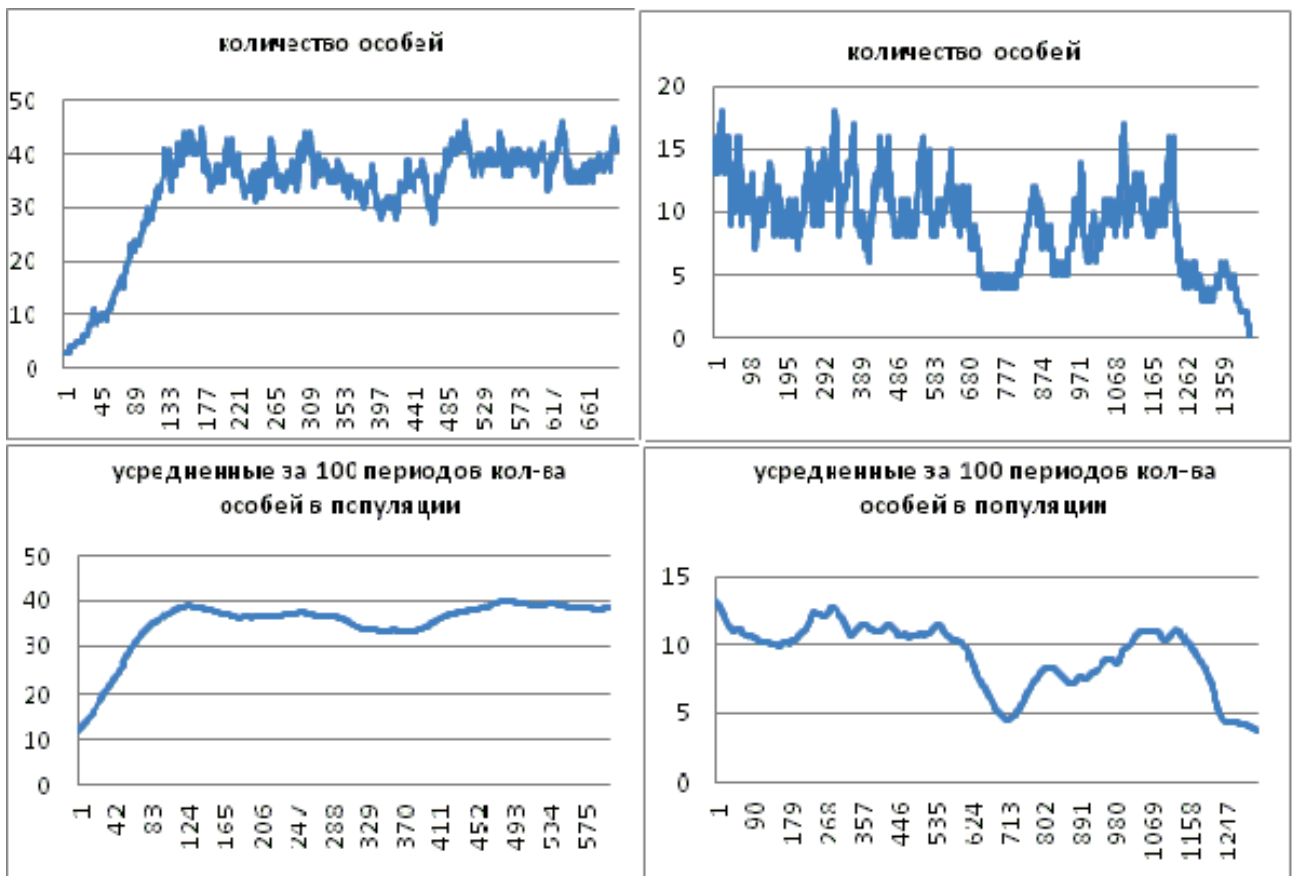


Рисунок 2.3. Модель с неагрессивными агентами (слева), модель с агрессивными агентами (справа).

В модели с неагрессивным поведением агентов численность особей быстро достигает некоторого равновесного состояния, количество агентов в котором колеблется примерно в диапазоне от 30 до 40. В модели с агрессивным поведением агентов наблюдается плавное снижение численности популяции, что в итоге приводит к ее исчезновению. Далее всюду ниже будут изучаться только модели с агрессивным поведением агентов. Будут определяться области параметров, при которых популяция либо выживает, либо наблюдается их исчезновение.

Влияние параметра dim

Рассмотрим как изменение размеров ареала повлияет на динамику численности популяции в случае с агрессивными агентами. Приведем график изменения количества агентов для случаев $dim = 10$, $dim = 14$, $dim = 15$,

$dim = 16$ и $dim = 20$. Для всех экспериментов начальный уровень здоровья будет равен 20.

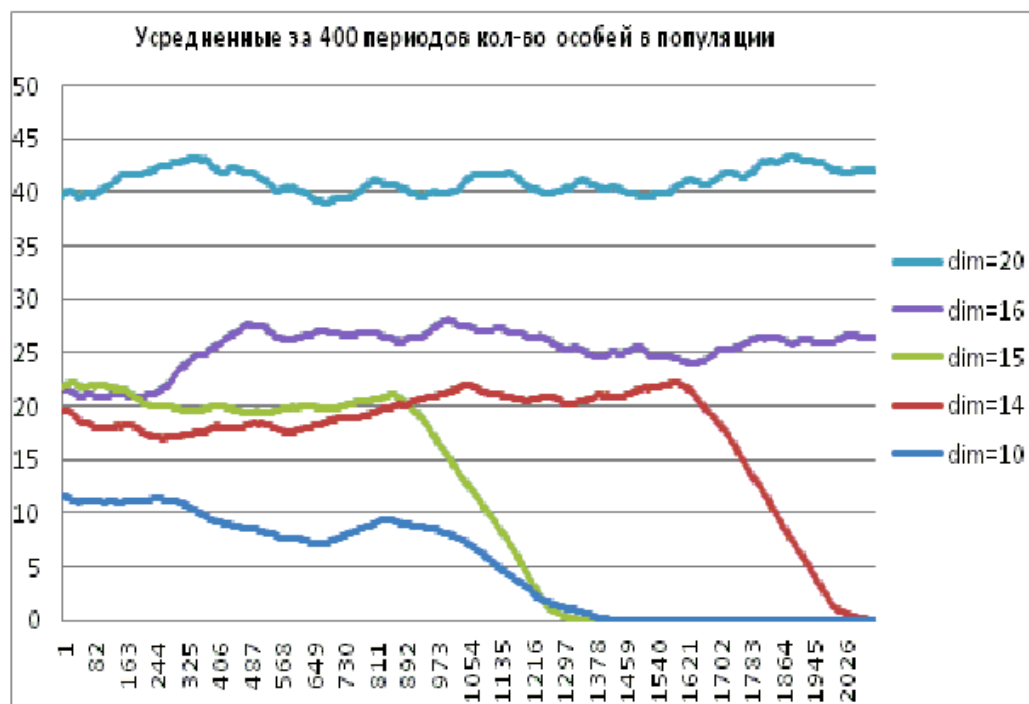


Рисунок 2.4. Динамика численности популяции в зависимости от разных значений параметра dim .

В некоторой степени результаты получаются неожиданными. При значениях параметра dim больше чем 15 популяция выживает, с увеличением этого параметра усредненная численность популяции также растет. При меньших значениях этого параметра популяция вымирает, причем, на примере приведенных экспериментов видно, что может наблюдаться немонотонность времени вымирания от рассматриваемого параметра dim . На рисунке 2.5 приведены данные тех же экспериментов, однако ось ординат соответствует не численности агентов, как на предыдущем рисунке, а плотности агентов – величине, равной количеству особей, деленной на dim^2 (количество всех клеток на ареале).

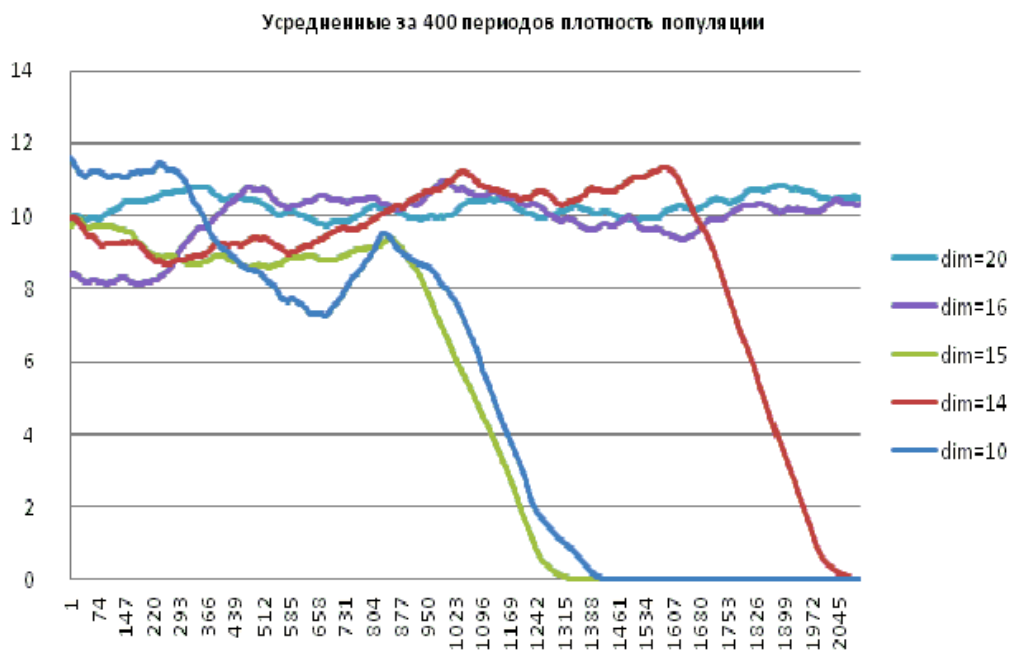


Рисунок 2.5. Динамика плотности популяции в зависимости от разных значений параметра dim .

Также можно обратить внимание на изменение численности особей для случаев $dim = 16$ и $dim = 20$. Плотность населения в этих экспериментах в среднем колеблется на уровне 10, что может свидетельствовать о наличии инварианта – плотность населения, при условии, что популяция выживает, в среднем не меняется в зависимости от параметра dim . Другие проведенные эксперименты подтверждают данную гипотезу.

Влияние начального уровня здоровья

Рассмотрим влияния начального уровня здоровья на динамику развития популяции. Для этого отдельно будет проведена серия экспериментов модели для случая $dim = 10$ и серия экспериментов для случая $dim = 20$.

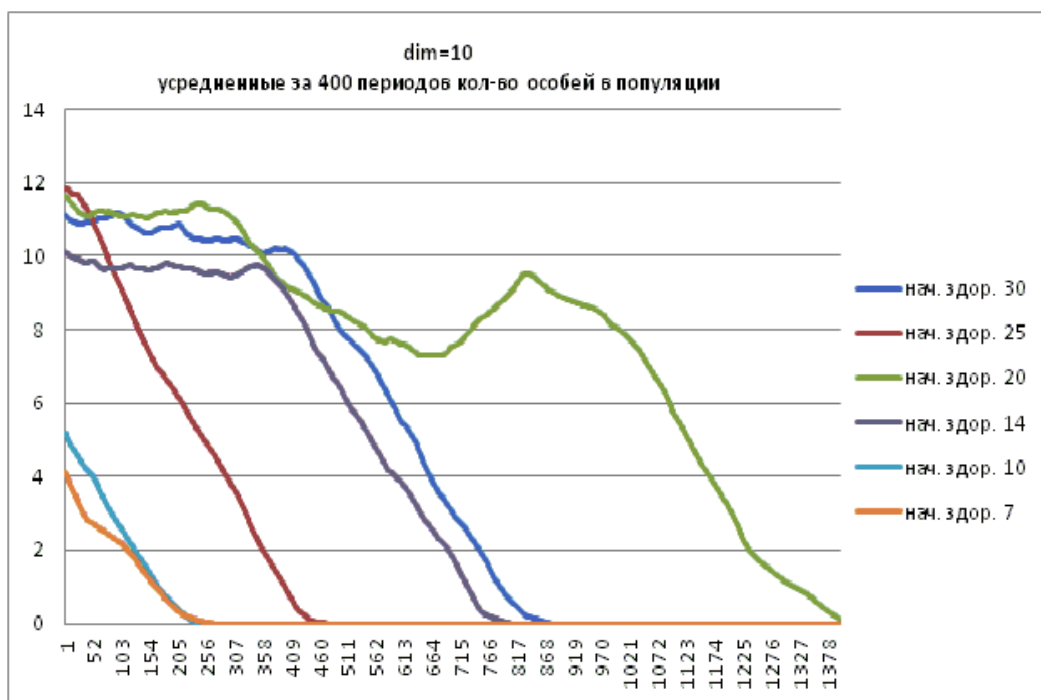


Рисунок 2.6. Динамика численности популяции в зависимости от разных значений начального уровня здоровья при $dim=10$.

Из приведенного на рисунке 2.6 графика видно, что при $dim = 10$ при любых значениях начального уровня здоровья всегда наблюдается исчезновение популяции. Также на примере приведенных экспериментов видно, что средний период жизни популяции не монотонно зависит от начального уровня здоровья, а именно, как при достаточно больших значениях этого параметра, так и при малых его значениях популяция живет заметно меньше, чем при некотором среднем значении начального уровня здоровья. Эти результаты устойчивы и также наблюдаются в других экспериментах.

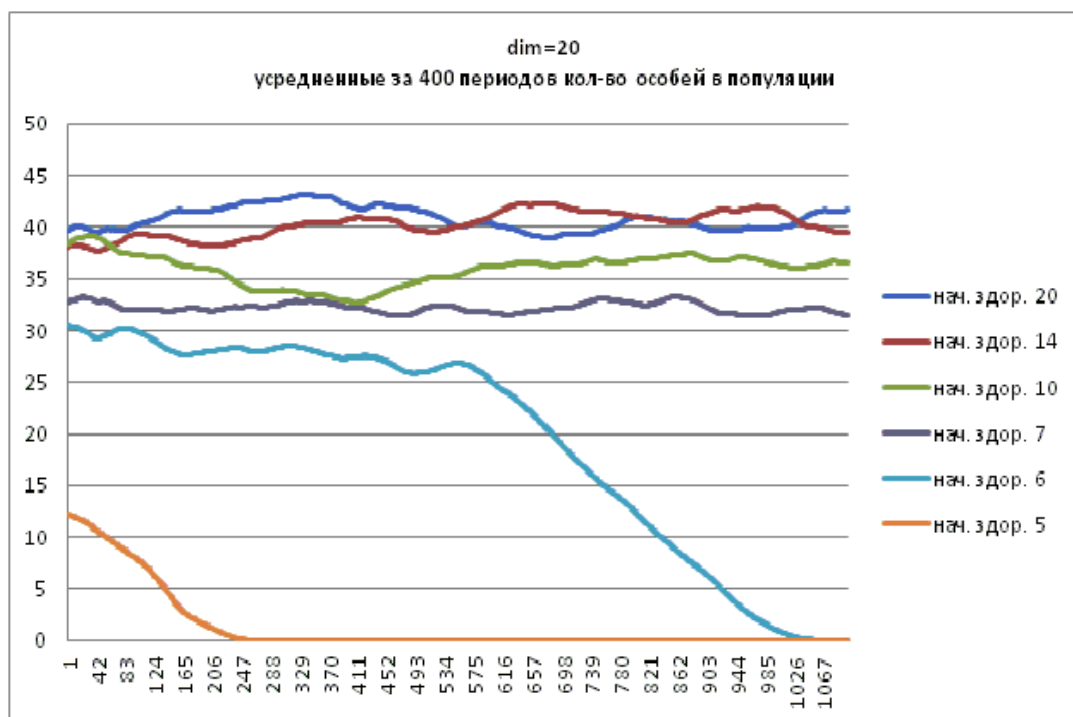


Рисунок 2.7. Динамика численности популяции в зависимости от разных значений начального уровня здоровья при $dim=20$.

В случае $dim = 20$ (рис. 2.7) наблюдается монотонная зависимость среднего количества особей в популяции от начального уровня здоровья – чем больше значение этого параметра, тем дольше продолжительность жизни популяции, либо, если исчезновение популяции не наблюдается, тем выше усредненное количество агентов в популяции. Начальный уровень здоровья равный 7 является пороговым значением, начиная с которого за наблюдаемое время популяции выживают, при начальном уровне здоровья равном 6 и ниже популяции исчезают. При достаточно больших значениях начального уровня здоровья каждое последующее увеличение этого параметра все меньше влияет на динамику численности популяции. Так, при начальном уровне здоровья равном 14 и при начальном уровне здоровья равном 20 система демонстрирует примерно одинаковую динамику.

Выводы

Произведено сравнение моделей с агрессивным и неагрессивным поведением агентов, показано, что в случае неагрессивных агентов популяции

практически во всех случаях выживают. В моделях с агрессивным поведением агентов выявлены пороговые значения параметров, при которых популяции либо исчезают, либо выживают на обозримых интервалах времени. Одним из ключевых параметров модели является параметр, характеризующий размер ареала – *dim*. Получено, что при малых значениях этого параметра популяции вымирают, тогда как увеличение значений этого параметра, при прочих равных, положительно сказывается на способности популяции выживать. Для значений параметра *dim*, при которых популяции не вымирают, по всей видимости, существует инвариант – при прочих равных, плотности населения на ареале не зависят от изменения размеров ареала.

Изучение влияния начального уровня здоровья показало, что при достаточно малых значениях *dim*, при которых популяции вымирают, средняя продолжительность жизни популяции не монотонно зависит от начального уровня здоровья, при этом можно определить оптимальное значение этого параметра, отступая от которого в большую или меньшую сторону средняя продолжительность жизни популяции будет снижаться. При достаточно больших значениях параметра *dim*, время исчезновения популяции, либо средний уровень численности, в случае, если популяция не исчезает, монотонно зависят от начального уровня здоровья. Определено пороговое значение начального уровня здоровья. При больших либо равных значениях данного порогового уровня популяция выживает, при меньших значениях наблюдается ее исчезновение.

Глава 3. Модель сообщества с неоднородной социально-экономической структурой –«кочевники» и «землепашцы».

3.1. Модель «кочевников» и «землепашцев». Описание и результаты.

Введение

Одним из наиболее заметных ученых, занимавшихся вопросами возникновения и исчезновения цивилизаций, является известный британский историк, социолог, культуролог и философ истории Арнольд Тойнби. Наиболее известным его исследованием является «Постижение истории» [18], в которой, в частности, автор в истории человечества выделяет два вида сообществ и цивилизаций. Первый вид цивилизаций условно можно назвать «землепашцами», в основе деятельности данного вида лежит обработка первичных ресурсов и производство дополнительного продукта (прибавочной стоимости) за счет внутренней самоорганизации, создания соответствующей инфраструктуры и усложнения структуры социума. Второй вид цивилизаций условно называется «кочевниками», этот вид потребляет первичный продукт, в то время как дополнительный продукт получают за счет отъема его у других, в том числе и у «землепашцев». Примерами цивилизаций, которые могут быть отнесены к цивилизациям «землепашцев», служат византийские и римские империи, цивилизации междуречья и передней Азии. Примерами кочевнических цивилизаций могут послужить цивилизации великой степи. Тем не менее, в самом начале своего жизненного цикла цивилизации этих двух типов не существовали в чистом виде. В цивилизации «землепашцев» были отдельные не многочисленные группы представителей цивилизации «кочевников», роль которых выполняли ростовщики. В рамках данной цивилизации «землепашцев» эта группа была антиподом устоявшимся правилам и нормам и по этой причине осуждалась и отвергалась обществом. Аналогично в цивилизации «кочевников» могли встречаться отдельные группы, образ жизни которых был характерен скорее для землепашцев, эти группы занимались бахчеводством. В цивилизации «кочевников» данные группы также противопоставлялись правилам и нормам и

также осуждались и отвергались обществом. В ранней истории человечества цивилизации обоих типов существовали изолированно, но при этом некоторое взаимодействие между ними всегда происходило.

В текущей главе изучается общество с простейшей социально-экономической структурой, в котором все его представители относятся к одному из двух классов – либо к кочевникам, либо к земледельцам. Представители каждого из данных классов характеризуются своей причастностью к процедуре воспроизводства продукта. Если земледельцы умеют его воспроизводить самостоятельно, затрачивая свой труд и увеличивая его урожайность, то у кочевников нет навыка воспроизводить дополнительный продукт, вместо этого они добывают продукт путем поиска его на ареале, в том числе и отбирая у земледельцев и иногда у других кочевников.

Реализация модели осуществлена в программном комплексе AnyLogic.

Описание модели

Модель по своей конструкции очень похожа на модель из предыдущей главы, в ней также присутствует ареал, ресурс и агенты. Главное отличие этих двух моделей в том, что популяция в новой модели состоит не из однородных агентов, она разбита на два указанных выше класса – кочевников и земледельцев. Аналогично, как и в предыдущей модели, в данной модели время дискретно, роль ареала обитания выполняет квадратное поле с ячейками размером $dim \times dim$. Каждая ячейка ареала может характеризоваться тремя состояниями – либо в данный момент в ней находится один из агентов, либо в ней появился ресурс, либо клетка в данный период времени пуста.

Ресурс

Ресурс в модели может быть двух типов – дикий и культурный. Дикий ресурс возникает на ареале случайным образом с заданной интенсивностью, которая определяется параметром $growth_rate \in [0,1]$. По сути $growth_rate$ – это

вероятность, с которой в каждой, отдельно взятой пустой клетке в данный период времени появится ресурс. Культурный ресурс (он же продукт) может быть произведен только благодаря землепашцам, об этом будет сказано чуть ниже, когда речь пойдет о правилах поведения агентов. По своим свойствам дикий и культурный ресурсы не отличаются, их воздействие на всех агентов одинаковое. Единственное отличие одного вида ресурсов от другого – это цвет, с которым они отображаются во время визуализации модели. Если культурный ресурс имеет ярко-зеленый цвет, то дикий ресурс окрашен в бледно-зеленый цвет.

Переменные модели

Основными переменными для каждого агента, меняющимися в каждый момент времени уровень его текущего здоровья (переменная *health*), возраст (*life_period*), сколько периодов назад данный агент потреблял пищу (*hungry*) и сколько периодов назад участвовал в рождении новой особи в качестве одного из двух родителей (*bear*). Также важной характеристикой любого агента является его текущее местоположение, которое характеризуется двумерными координатами (x , y), каждая из которых может принимать целочисленные значения в диапазоне от 1 до dim . Как уже было отмечено модель пошаговая, очередность ходов для агентов задается в ней случайным образом. Поведение агентов основано на информации, которую они получают из внешней среды. Видеть они могут только соседние клетки (получается не больше восьми клеток), передвигаться агенты также могут только на соседние клетки.

В каждый период времени переменная *life_period* всегда увеличивается на единицу. Если агент потребил ресурс в данный момент, то переменная *health* увеличивается на две единицы, если агент ресурс не потреблял, то значение этой переменной уменьшается на единицу. Если переменная *health* снижается до нуля, то агент умирает. Переменная *hungry* увеличивается на единицу, если агент не потреблял ресурс в данный момент времени и сбрасывается до 0, если потреблял. Переменная *bear* сбрасывается до нуля, если агент участвовал в рождении нового

агента в данный период в качестве одного из родителей и увеличивается на единицу, если не участвовал.

Параметры модели

Ключевыми параметрами для каждого агента являются его предельный возраст (*life_bound*) – количество периодов, больше которого, вне зависимости от остальных параметров, агент физически прожить не может (если $life_period < life_bound$, особь жива, иначе она умирает); *hungry_bound* – пороговое значение, характеризующее количество периодов, после которого агент переходит в состояние «голоден» и действует в соответствии с этим состоянием (если $hungry > hungry_bound$, агент считается голодным, в противном случае не голодным); *bear_bound* – пороговое значение, характеризующее количество периодов, прошедших с последнего участия в родах, после которого агент снова может принять участие в родах в качестве одного из родителей ($bear > bear_bound$, агент может рожать, иначе – не может).

Перечисленные параметры и переменные агентов одинаковые для кочевников и землепашцев.

Агенты

Рассмотрим более детально алгоритмы поведения агентов. Их поведение принципиально отличается от типа (кочевники или землепашцы), которому они принадлежат. Второе, что влияет на поведение, это значение переменных каждого из агентов и в каких областях относительно параметров модели лежат эти переменные. В зависимости от переменных агенты могут находиться в одном из нескольких состояний. Основные состояния, в которых поведения агента любого вида принципиально отличаются – это состояние «голоден» и состояние «сыт». Также, на поведение каждого из агентов оказывает влияние текущая обстановка окружающей его среды, т.е. то, что происходит вокруг него, в соседних от него клетках. Конкурентным преимуществом землепашцев перед кочевниками является их способность выращивать культурный ресурс в моменты, когда им это

нужно, т.е. когда они находятся в состоянии «голоден». С другой стороны, конкурентным преимуществом кочевников перед землепашцами является то, что они в состоянии «голоден» способны действовать агрессивно по отношению к остальным агентам любого типа. Агрессивные действия объясняется тем, что в состоянии «голоден» кочевник воспринимает других агентов в качестве конкурентов на ограниченный ресурс. В состоянии «сытый» агенты обоих видов действуют примерно по одному и тому же алгоритму. А именно, в первую очередь они ищут другую особь своего типа для спаривания, если особь соответствует определенным требованиям, то в следующий период рождается новый агент такого же типа. Одним из условий готовности обоих агентов родить особь является то, что возраст обоих агентов родителей должен быть в диапазоне от 13 до 40 периодов ($life_period \in [13; 40]$). Этот возраст будет считаться репродуктивным возрастом для всех типов агентов. Также агенты всех типов считаются однополыми и любые два агента одного типа в потенциале могут спариваться и зачинать нового агента. Если в ближайшем окружении агентов своего типа нет, то следующей по приоритету задаче является сканирование близлежащих клеток на наличие ресурса, который можно было бы потребить. Если свободного ресурса тоже нет, то агент отправляется на поиски других агентов и свободного ресурса. Рассмотрим алгоритмы поведения каждого из видов агентов более подробно.

Землепашцы

Как было отмечено выше, основным навыком землепашцев является умение выращивать культурный ресурс. Потребность в ресурсе возникает в момент, когда агент оказывается в состоянии «голоден» ($hungry > hungry_bound$). В этом состоянии землепашец сканирует соседние от него клетки, если там нет свободного ресурса, и есть несколько или хотя бы одна свободная клетка, то он засеивает все соседние свободные клетки культурным ресурсом, который взойдет на следующий период. Если на одной из соседних клетках есть ресурс, то землепашец его потребляет. В сытом состоянии ($hungry \leq hungry_bound$) у агента в

приоритете задача продолжения рода, нежели потребление или воспроизводства ресурса. Если выполнено условие того, что агент не участвовал в рождении другой особи более $bear_bound$ периодов ($bear > bear_bound$) и его возраст находится в диапазоне от 13 до 40 периодов, то в состоянии «сыт» он просматривает соседние клетки на предмет присутствия в них других землепашцев. Если на соседних клетках есть один или несколько землепашцев, случайным равновероятным образом выбирается любой из них и делается попытка зачатия новой особи. Если второй выбранный землепашец также удовлетворяет условиям $hungry \leq hungry_bound$, $bear > bear_bound$ и его возраст лежит в диапазоне от 13 до 40 периодов, а также рядом с одним из этих двух землепашцев есть хотя бы одна свободная клетка, то в следующий период появляется новый агент, также землепашец, который занимает эту свободную клетку ареала. Если для второго землепашца хотя бы одно из перечисленных условий не выполнено, то новый землепашец появиться не сможет. Уровень здоровья у нового агента равен среднему арифметическому от уровней здоровья двух его родителей, при этом уровни здоровья родительских особей уменьшаются на половину. Если для второго агента, с которым осуществляется попытка зачатия новой особи, условие $bear \leq bear_bound$ не выполнено, то нового землепашца в следующий период не появляется. Если в состоянии «сыт» землепашец не видит вокруг себя других землепашцев, то на следующем приоритете в его поведении стоит задача поиска свободного ресурса для потребления, и он двигается в произвольном, равновероятном направлении, т.е. в любую свободную клетку вокруг себя.

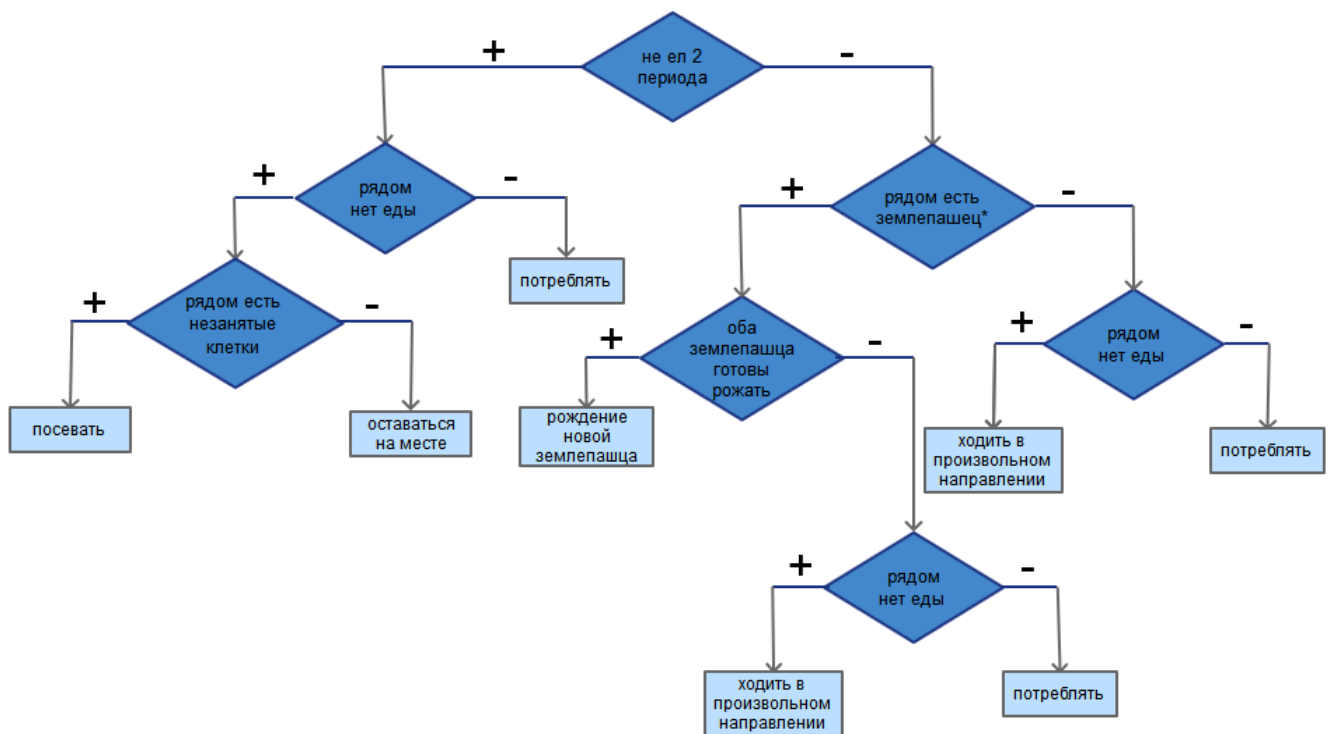
Кочевники

Аналогично, более подробно опишем алгоритм поведения кочевников. Как и землепашцы, в состоянии «голоден» ($hungry > hungry_bound$) кочевники в большей степени озабочены поиском ресурса. Однако в отличие от землепашцев, которые в этом состоянии начинают выращивать культурный ресурс, кочевники выращивать его не умеют, они могут только его находить на ареале, для них не

важно, дикий это ресурс или культурный, выращенный одним из землепашцев для своих нужд. Таким образом, если кочевник в состоянии «голоден» находит ресурс, то вне зависимости от остальных условия он потребляет его. В случае, если ресурса рядом нет, но при этом на соседних клетках есть другие агенты, то кочевник будет проявлять агрессию по отношению к одному из этих агентов. Если среди рядом находящихся агентов есть как кочевники, так и землепашцы, то в первую очередь агрессивные действия будут направлены против одного из землепашцев (если землепашцев несколько, то жертва выбирается случайно, равновероятным способом), если землепашцев рядом нет, но есть кочевники, то атакован будет один из этих кочевников (жертва также выбирается равновероятно). Действуя агрессивно, кочевник атакует свою жертву, после чего та умирает, одновременно с этим уровень здоровья атакующего кочевника увеличивается на величину уровня здоровья его жертвы. Если на прилегающих клетках нет ни ресурса, ни других агентов, то кочевник делает ход в произвольном, равновероятном направлении на одну из соседних пустых клеток. Если кочевник находится в состоянии «сыт» ($hungry \leq hungry_bound$), если выполнено условие $bear > bear_bound$, а также если его возраст лежит в диапазоне от 13 до 40 периодов, так же как и в алгоритме поведения землепашцев, для кочевника главным в приоритете становится удовлетворение инстинкта продолжения рода. Для этого он сканирует клетки вокруг себя, если рядом есть другие кочевники и если их несколько, то случайным, равновероятным способом выбирается один из кочевников. Далее после того как выбор сделан осуществляется попытка спаривания, если для второго кочевника так же выполнены условия $hungry \leq hungry_bound$, $bear > bear_bound$ и его возраст лежит в диапазоне от 13 до 40 периодов, а также рядом с одним из этих двух кочевников есть хотя бы одна свободная клетка, то в следующем периоде в свободной клетке рождается еще один кочевник. Если для второго кочевника хотя бы одно из перечисленных условий не выполнено, то рождения новой особи не происходит. Уровень здоровья у нового агента равен среднему арифметическому от уровней здоровья двух его родителей, при этом уровни здоровья родительских особей

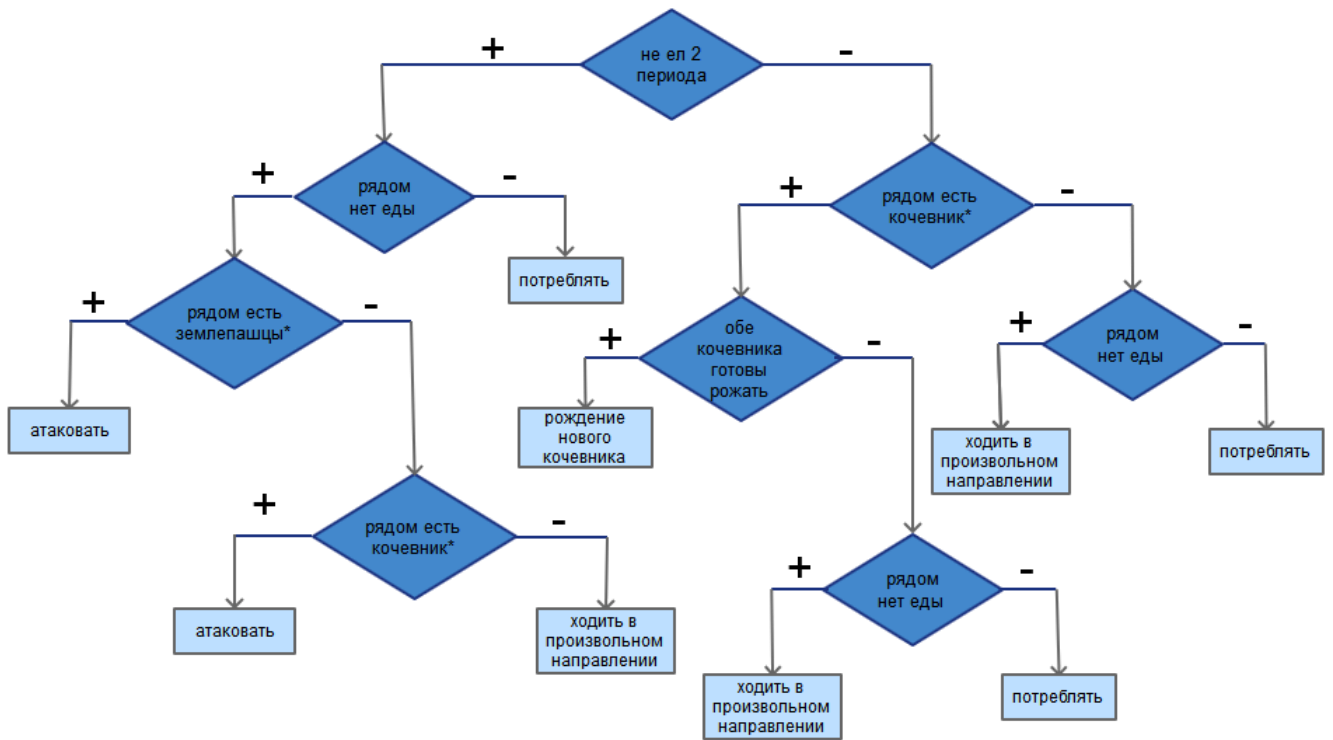
уменьшаются на половину. Если в состоянии «сыт» рядом с данным кочевником других кочевников нет, то следующей по приоритету задача является поиск ресурса для потребления. Для этого кочевник сканирует близлежащие клетки пространства, если там есть ресурс, агент его потребляет, если ресурса нет, то он ходит в произвольную соседнюю пустую клетку, выбранную случайным, равновероятным способом.

Схематично, в виде блок-схемы алгоритм поведения землепашцев изображен на рисунке 3.1, алгоритм поведения кочевников на рисунке 3.2



* - одновременно с указанным условием дополнительно должно быть выполнено условие – $life_period \in [13; 40]$.

Рисунок 3.1. Блок-схема алгоритма поведения землепашцев.



* - одновременно с указанным условием дополнительно должно быть выполнено условие – $life_period \in [13; 40]$.

Рисунок 3.2. Блок-схема алгоритма поведения кочевников.

Модель визуализирована, фрагмент (скриншот) такой визуализации представлен на рисунке 3.3. На данном рисунке изображена модель, размер ареала которого 40 на 40 клеток ($dim=40$), землешцы обозначены коричневым цветом, кочевники обозначены черным цветом, клетки бледно зеленого цвета обозначают дикий ресурс, клетки ярко-зеленого служат для обозначения культурного ресурса, белые клетки являются пустыми клетками.

Отметим, что как и в модели второй главы, начальное количество агентов можно разбить на два множества – в первом множестве вымирание одного из видов (или обоих) наступает достаточно быстро, не успев достигнуть равновесного уровня, во втором множестве динамика численности обеих популяций через сравнительно короткое время приходят в некоторое равновесное состояние, в котором развиваются в течении достаточно длительного времени.

Для первого множества начального количества агентов обоих видов характерно слишком малое количество особей одного или обоих видов в начальный момент времени (такое, что они не успевают размножиться и быстро исчезают). Также возможна ситуация, при которой начальное количество одного вида не соизмеримо превышает количество другого, тогда вид, популяция которого больше, может как бы подавить меньший вид, не дав ему развиться до равновесного уровня. Для второго множества характерна сбалансированная начальная численность обоих видов. В данном исследовании нас будет интересовать второе множество начальных значений, поскольку нас интересует долгосрочная динамика численности популяций обоих видов.

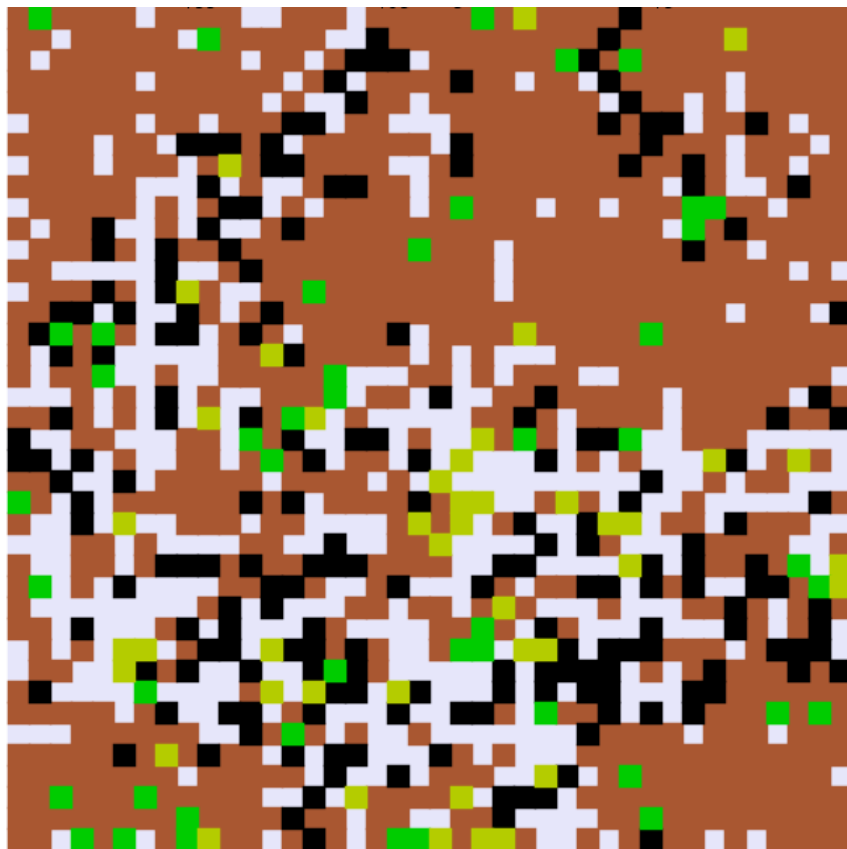


Рисунок 3.3. Визуализация модели во время прогона (скриншот).

Основная гипотеза в данном случае состоит в том, что если начальные значения численности агентов обоих видов взяты из второго множества, то принципиально не важно на каком именно уровне взяты эти начальные значений, поскольку система в любом случае придет в свое равновесное состояние. Данная

гипотеза была подтверждена экспериментально и далее этот вопрос подниматься не будет. В экспериментах ниже начальное число землепашцев будет на уровне 150 единиц, начальное количество кочевников будет равным 60.

Релевантность модели, соотнесение с реальностью

В рамках модели изучаются общества с простейшей социальной структурой. Такого рода структуры могли быть характерны для древних обществ или цивилизаций. Так, классическим примером цивилизации кочевников выступает кочевнические цивилизации великой степи. Примерами цивилизаций землепашцев могут послужить цивилизации передней Азии, междуречья, римских и византийских империй.

Кроме этого, как было отмечено во введении данной диссертации, подобную структуру могут иметь в том числе и современные общества пережившие серьезную катастрофу, одним из результатов которой может стать разрушение всех прежних социальных структур и низведение исходного общества к простейшему обществу типа кочевников и землепашцев.

Предполагается, что период модельного времени будет соответствовать одному году, поэтому во всех экспериментах параметр *life_bound* будет принимать значение 50 периодов. Таким образом подразумевается, что особь любого вида может прожить не дольше пятидесяти периодов (лет) вне зависимости от остальных параметров и переменных данного агента. Ограничение на репродуктивный возраст, лежащий в диапазоне от 13 до 40 периодов, также укладывается в данную логику.

Значения параметров модели *bear_bound* и *hungry_bound* будут взяты на уровне двух периодов. Параметр, отвечающий за период восстановления после родов будет действовать для обеих особей, матери и отца, участвовавших в рождении нового агента. Данный период восстановления характеризует восстановление организма агентов после родов, только по истечению этого срока агенты снова могут стать родителями. Также как и значение параметра *life_bound*

в рамках данного исследования значения параметров *bear_bound* и *hungry_bound* меняться не будет.

Переменная *health* может быть интерпретирована двумя способами. Во-первых, в соответствии с обозначением данная переменная характеризует уровень здоровья особи – чем больше значение этого параметра, тем более здоровым является рассматриваемый агент. Вторая интерпретация этой переменной заключается в том, что она может характеризовать уровень запасов ресурса данного агента – чем выше этот уровень, тем дольше агент может прожить автономно, не получая ресурсов извне. Если переменная *health* опускается до нуля, то вне зависимости от остальных переменных и параметров агента, с этого момента данная особь будет считаться мертвой. Видно, что переменная *health* и *hungry* связаны между собой. Если для переменной *hungry* будет выполнено условие $hungry > hungry_bound$, то вне зависимости от уровня здоровья или, что тоже самое, от уровня запасов, агент в любом случае переходит в состояние «голоден». Интерпретация такой ситуации заключается в том, что если агент в течение долгого времени не может найти ресурс, то он считает его дефицитным (даже если у него достаточно запасов) и меняет линию своего поведения в соответствии со своим типом. Кочевники начинают вести себя агрессивно по отношению к другим агентам, землепашцы засеивают пространство вокруг себя культурным ресурсом.

Клетка ареала выполняет роль участка, в котором может находиться только один агент. В течении каждого периода агент может находиться только в своей клетке, в следующем периоде эту клетку он может поменять. Такие правила соответствуют тому, что каждая особь не способна уйти со своей клетки в течении одного года. Однако это не мешает агентам, расположенным по соседству взаимодействовать друг с другом. Для захвата и потребления ресурса агенту необходимо переместиться на ту клетку, на которой данный ресурс находится, это интерпретируется как освоение агентом плодородного участка, за

счет которого он увеличивает свой уровень здоровья и уровень запасов. Землепашцы обладают умением выращивать ресурс на соседних участках.

Основные параметры проводимых экспериментов

Опишем ключевые характеристики экспериментов, которые будут применяться для исследования построенной модели. Выбран базовый уровень значений основных параметров модели. Исследование будет заключаться в организации вариации одного из параметров модели при фиксированных значениях на базовом уровне остальных параметров модели. Выбраны несколько параметров, по отношению к которым будет осуществлена такая вариация. На первом этапе исследования длительность каждого из экспериментов будет составлять 4000 периодов.

Приведем базовый уровень значений основных параметров модели:

- $dim = 50$;
- $growth_rate = 0,1$;
- $life_bound = 50$;
- $bear_bound = 2$;
- $hungry_bound = 2$.

Как было отмечено чуть выше, параметры $hungry_bound$, $bear_bound$ и $life_bound$ в данном исследовании меняться не будут. Будет изучаться влияние двух первых параметров модели – dim и $growth_rate$.

Динамика численности популяции землепашцев при базовых значениях основных параметров модели представлена на рисунке 3.4. Динамика численности кочевников при тех же значениях параметров модели представлена на рисунке 3.5.

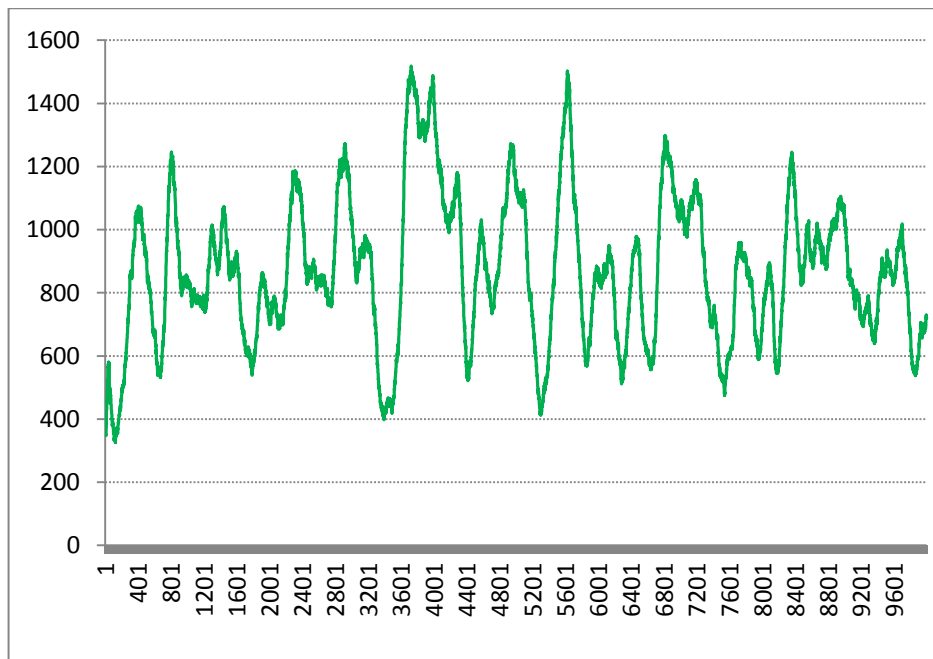


Рисунок 3.4. Динамика численности популяции землепашцев.

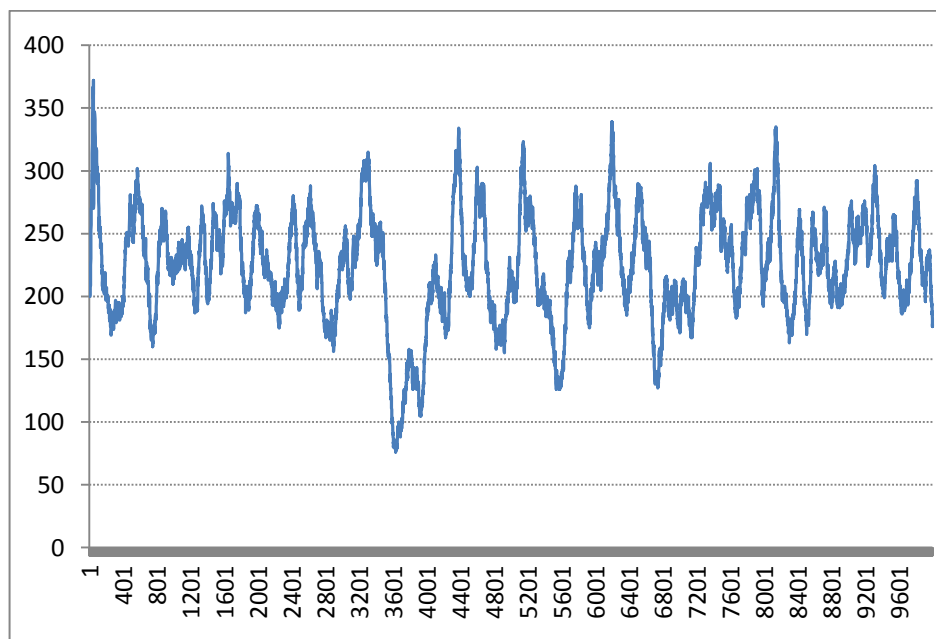


Рисунок 3.5. Динамика численности популяции кочевников.

В приведенной ниже таблице указаны диапазоны варьирования выбранных параметров модели, а также шаги варьирования.

	Параметр модели	Базовые значения параметров	Диапазон варьирования	Шаг варьирования	Количество экспериментов
1	<i>dim</i>	50	40-60	1	21
2	<i>growth_rate</i>	0,1	0-0,18	0,01	19

При вариации параметров, для каждого из набора значений будет проводиться один эксперимент. Остановка каждого из экспериментов будет осуществляться либо при наступлении 4000 периода, либо если одна из популяций вымирает.

Серия экспериментов #1

В рамках данной серии экспериментов будет осуществлена вариация параметра *dim* в диапазоне от 40 до 60 единиц с шагом 1.

Для анализа проводимой серии экспериментов будут построены и исследованы такие индикаторы как плотность населения ареала каждого из видов в отдельности, а также обоих видов вместе взятых. Будет проведено исследование того, как меняется усредненное за 4000 периодов доля землепашцев по отношению к количеству всех особей на ареале в зависимости от значений параметра *dim* (доля землепашцев вычисляется как численность землепашцев деленное на численность землепашцев плюс численность кочевников). Будет изучено изменение рождаемости агентов обоих видов в зависимости от изменения параметра *dim*. Также будет исследована динамика усредненной за 4000 периодов численности кочевников и землепашцев, а также всех особей вместе взятых в зависимости от размеров ареала.

Плотность заселения будет считаться как усредненная за 4000 периодов численность особей рассматриваемого вида, деленное на число клеток квадратного ареала, т.е. деленное на dim^2 .

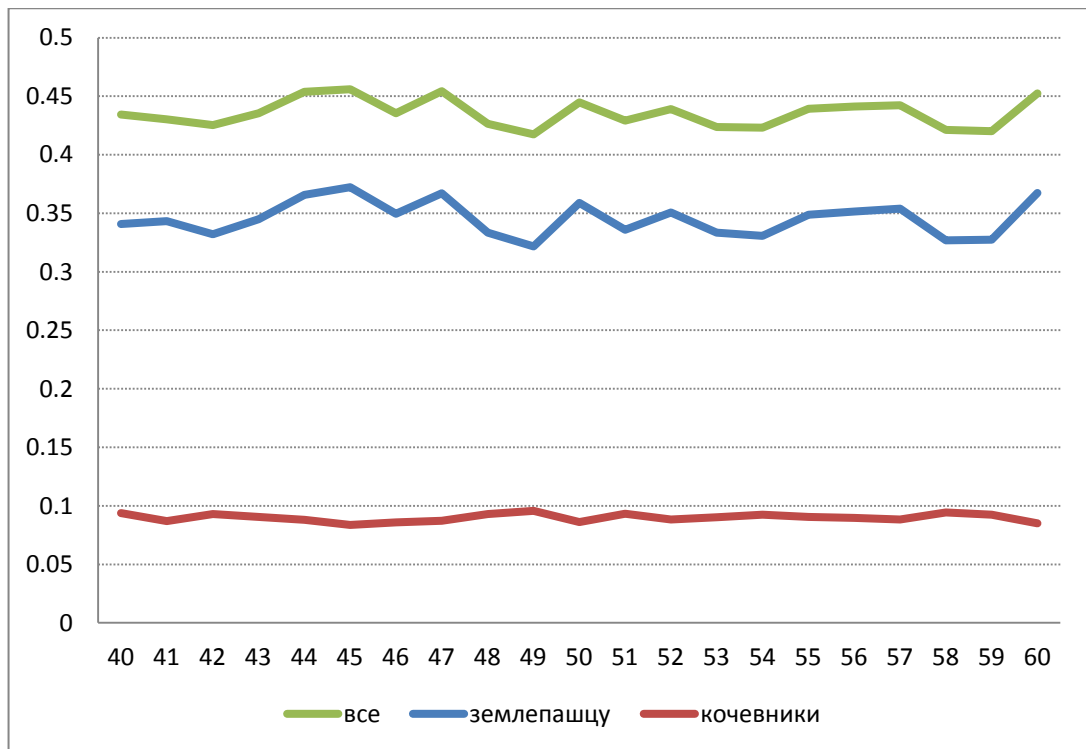


Рисунок 3.6. Динамика усредненной плотности агентов при разных значениях параметра dit .

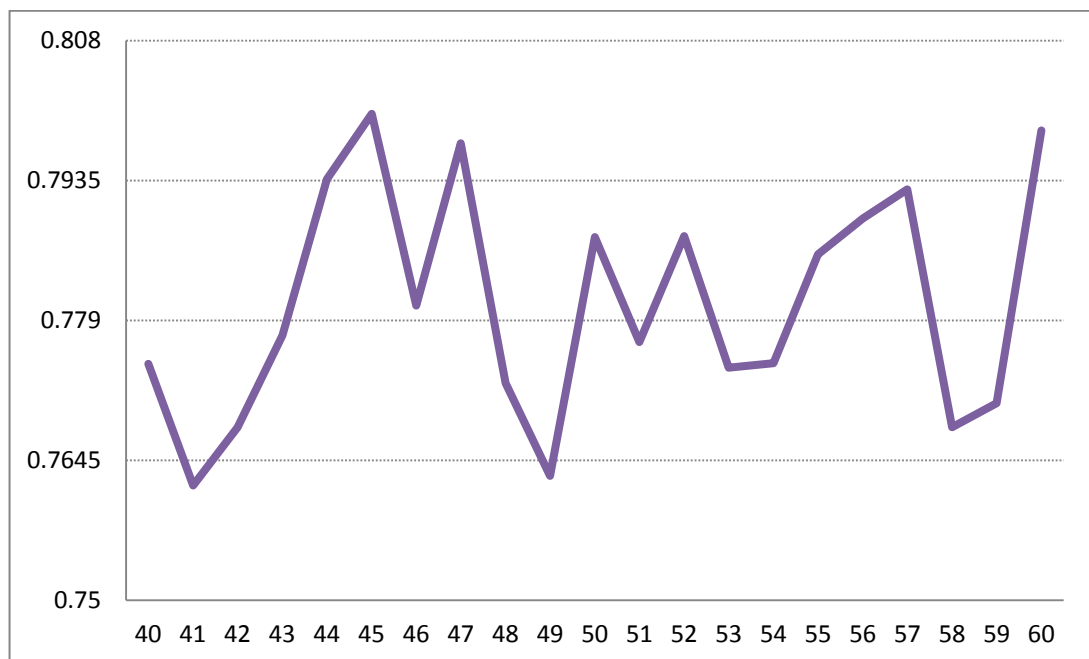


Рисунок 3.7. Динамика усредненной доли землепашцев при различных значениях параметра dit .

На основе представленных рисунков 3.6 и 3.7 можно высказать предположение о том, что представленные на графиках величины являются постоянными величинами с некоторой стохастической составляющей. Другими словами предположение состоит в том, что усредненная плотность агентов и усредненная доля землепашцев в среднем не меняются при изменении значений параметра dim , т.е. являются инвариантом. Для проверки данного предположения применим критерий «нисходящих» и «восходящих» серий, описание которого можно отыскать в книге [8]. На основе данного критерия будет проверена гипотеза о том, что математические ожидания приведенных рядов данных является неизменной величиной, или другими словами проверяется гипотеза $H_0: x_i = a = const$.

Применение данного критерия предполагает на базе исходного ряда данных x_1, x_2, \dots, x_N построить второстепенную последовательность, в которой i -ой позиции присваивается «+», если $x_{i+1} > x_i$ и присваивается «-», если выполнено обратное условие. Восходящей серией называется последовательность подряд расположенных плюсов, аналогично, нисходящей серией будет называться последовательность подряд расположенных минусов. Идея критерия состоит в том, что, при условии независимости и одинаковой распределённости данных, количество наблюдаемых серий последовательности знаков не может быть слишком малочисленным, а их длина не может быть слишком протяженной. Через $\nu(N)$ обозначим общее количество серий, т.е. количество серий подряд идущих плюсов и минусов, через $\tau(N)$ обозначим максимальное число минусов или плюсов в самой длинной нисходящей или восходящей серии, соответственно, N – количество наблюдений.

На уровне значимости $0,050 < \alpha < 0,0975$ гипотеза H_0 будет принята при условии одновременного выполнения следующих двух неравенств:

$$\nu(N) > \left[\frac{1}{3}(2N - 1) - 1,96 \sqrt{\frac{16N - 29}{90}} \right]$$

$$\tau(N) < \tau_0(N),$$

где $\tau_0(N)$ берётся из соответствующей таблицы, которую также можно найти в книге Айвазяна С.А. [8].

Для нашей серии экспериментов число наблюдений N равно 21. Соответственно должны быть выполнены следующие неравенства:

$$\nu(N) > 10,047,$$

$$\tau(N) < 5.$$

Проверим гипотезу H_0 для полученных рядов плотности агентов и доли землепашцев. В случае усредненной плотности всех особей значения величин $\nu(N)$ и $\tau(N)$ равно $\nu(N) = 12, \tau(N) = 3$. Для усредненной плотности землепашцев значения этих показателей равно $\nu(N) = 13, \tau(N) = 3$, для кочевников $\nu(N) = 11, \tau(N) = 4$. Для усредненной доли землепашцев получаются следующие результаты $\nu(N) = 12, \tau(N) = 4$. Из полученных результатов видно, что для всех рассматриваемых рядов гипотеза H_0 принимается, т.е. элементы каждого из рядов можно считать реализациями независимых, одинаково распределенных величин. Это означает, что плотность населения любого из типов и доля землепашцев в среднем остается неизменной при изменении параметра dim .

Плотность населения всех агентов в среднем равна 0,44, плотность населения землепашцев в среднем равна 0,35, усредненная плотность заселения кочевников находится на уровне 0,09. Доля землепашцев по всем значениям параметра dim в среднем равна 0,78.

Более детально исследуем как меняется усредненная за 4000 периодов численность кочевников и землепашцев при варьировании параметра dim . На рисунке 3.8 изображена данная зависимость, которая получена на основе экспериментальных данных. Видно, что изображенная на рисунке зависимость

визуально похожа на линейную зависимость. Для проверки данного предположения построим следующую линейную регрессию

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i,$$

где y_i – средняя за 4000 периодов численность кочевников или земледельцев, x_i – значения параметра dim , меняется в диапазоне от 40 до 60 с шагом 1.

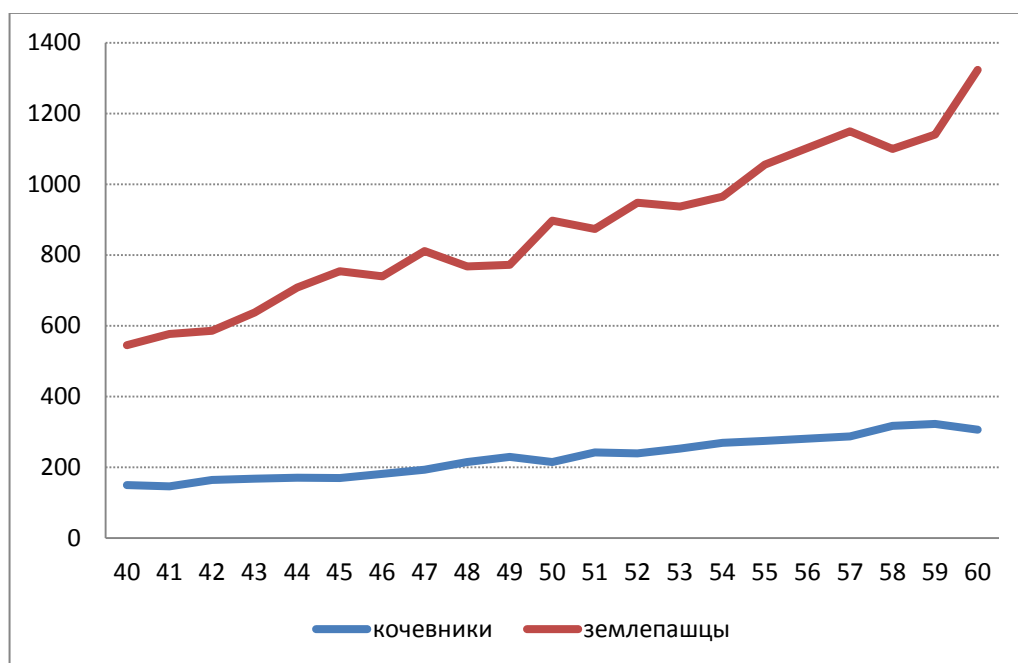


Рисунок 3.8. Усредненная за 4000 периодов численность кочевников и земледельцев при различных значениях параметра dim .

Если в качестве y_i взять численность земледельцев, то получаются следующие результаты регрессии:

	Оценки	Стандартная		
	коэффициентов	ошибка	t -статистика	P -Значение
α	-822,12	77,8399	-10,562	2,17E-09
β	33,96	1,54551	21,9702	5,73E-15

Коэффициент детерминации (R^2): 0,96, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 1,742.

Если в качестве y_i взята численность кочевников, то результаты регрессии получаются следующими:

	Оценки	Стандартная		
	коэффициентов	ошибка	t-статистика	P-Значение
α	-225,46	16,8266	-13,399	3,94E-11
β	9,07362	0,33409	27,1591	1,15E-16

Коэффициент детерминации (R^2): 0,97, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 1,763.

Анализ приведенных регрессий показывает в частности, что увеличение параметра dim на одну единицу в среднем приводит к росту численности землепашцев на 34 единицы, для кочевников численность вырастает в среднем на 9 единиц.

На следующем этапе исследуем динамику среднего за 4000 периодов количества родившихся кочевников и землепашцев. На рисунке 3.9 изображена данная динамика, которая также как и в предыдущем случае похожа на линейную зависимость рассматриваемого показателя от параметра dim .

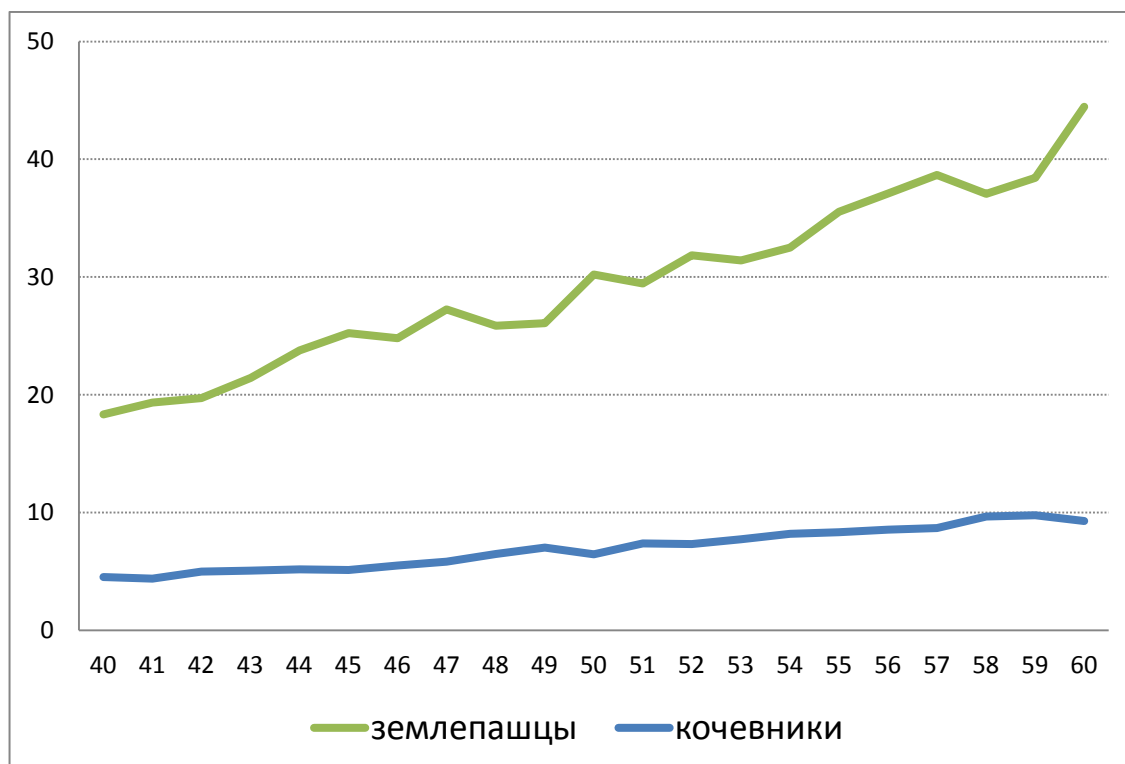


Рисунок 3.9. Усредненное за 4000 периодов количество родившихся кочевников и землепашцев при различных значениях параметра dim .

Аналогично рассмотрим регрессию следующего вида

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i,$$

где в качестве x_i также берутся значения параметра *dim* (от 40 до 60 с шагом 1), а в качестве y_i будет взята усредненная за 4000 рождаемость кочевников или землепашцев.

В случае, когда в качестве левой части берется усредненное количество землепашцев имеем следующие оценки регрессии:

	Оценки	Стандартная		
	Коэффициентов	ошибка	t-статистика	P-Значение
α	-27,831	2,55496	-10,89	1,3E-09
β	1,14578	0,05073	22,587	3,45E-15

Коэффициент детерминации (R^2): 0,96, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 1,746.

Если в качестве левой части взять усредненное количество кочевников получают следующие результаты:

	Оценки	Стандартная		
	коэффициентов	ошибка	t-статистика	P-Значение
α	-6,923	0,5366	-12,902	7,55E-11
β	0,27711	0,01065	26,0094	2,56E-16

Коэффициент детерминации (R^2): 0,97, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 1,889.

Из полученных регрессионных оценок видно, что увеличение на единицу параметра *dim* в среднем приведет к росту рождаемости для землепашцев на 1,15 единиц, для кочевников на 0,28 единиц.

Отметим также, что во всех представленных регрессиях коэффициент детерминации R^2 демонстрирует высокие значения, это свидетельствует о хороших объясняющих способностях моделей. Одновременно с этим статистика Дарбина-Уотсона во всех случаях достаточно близка к значению 2, что говорит об

отсутствии автокорреляции ошибок первого порядка. Таким образом представленные регрессионные модели могут быть успешно использованы для предсказания результатов при значениях параметра dim , выходящих за диапазон от 40 до 60 единиц.

Серия эксперимент #2

На следующем этапе изучим влияние параметра $growth_rate$, который будет варьироваться в диапазоне от 0 до 0,18 с шагом варьирования 0,01. Из рисунка 3.10 видно, что при значениях данного параметра расположенных в диапазоне от 0 до 0,13 включительно оба вида агентов сосуществуют на ареале на протяжении наблюдаемых 4000 периодов. При значениях параметра $growth_rate$ больше чем 0,13 в какой-то момент наблюдается исчезновение землешцев, на ареале остаются только кочевники. Причем чем больше значение данного параметра, тем быстрее наблюдается вымирание землешцев.

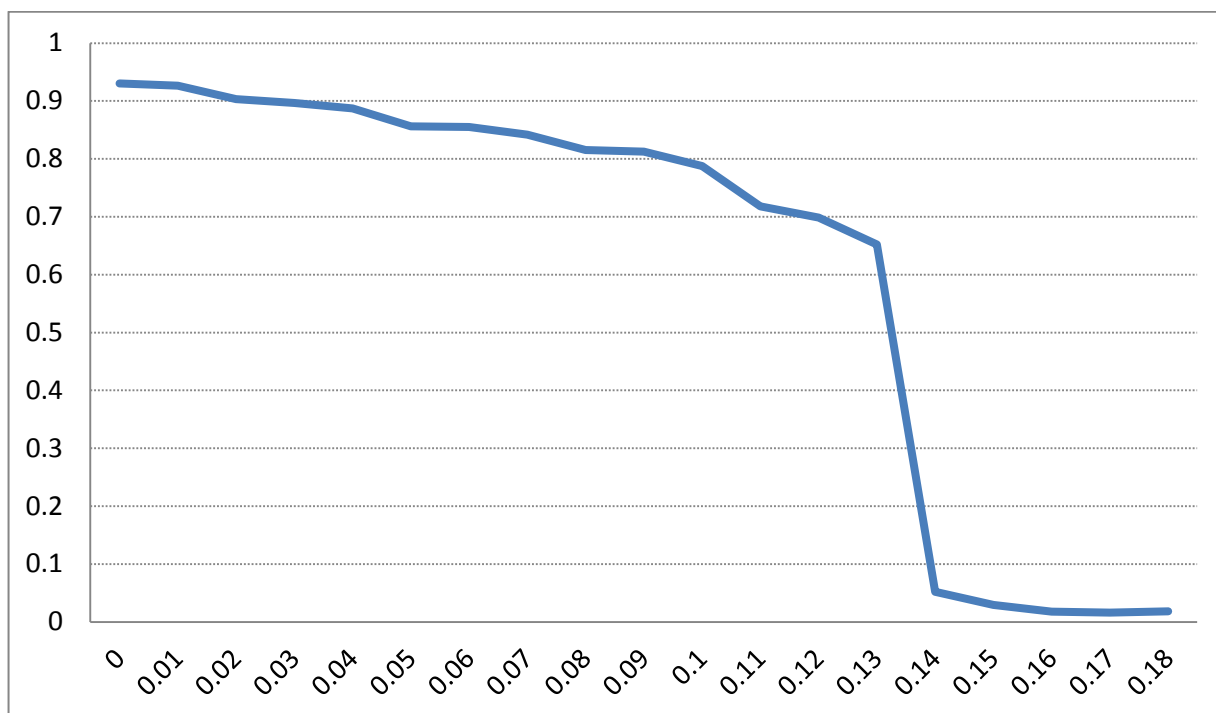


Рисунок 3.10. Усредненная за 4000 периодов доля землешцев при различных значениях параметра $growth_rate$.

Объяснение данному наблюдению достаточно понятно и интуитивно, при относительно высоких уровнях данного параметра наблюдается избыток дикого ресурса и потребность в культурном ресурсе у кочевников отпадает. Следовательно, когда численность кочевников становится достаточно большой, всех землепашцев они начинают воспринимать как конкурентов на ограниченный дикий ресурс, что приводит к полному истреблению землепашцев.

Как в предыдущей серии экспериментов, в данном случае также будем изучать динамику усредненной численности агентов, усредненной доли землепашцев и средней рождаемости. Для всех перечисленных показателей усреднение осуществляется за 4000 периодов.

Из представленного на рисунке 3.11 графика видно, что рассматриваемые закономерности по всей видимости имеют линейную природу. Построим соответствующие регрессионные модели:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i,$$

где y_i – усредненное за 4000 периодов численность либо кочевников, либо землепашцев, либо всех агентов вместе взятых, x_i – значения параметра *growth_rate* в диапазоне от 0 до 0,13 с шагом 0,01 (14 наблюдений).

Для случая, когда роль y_i выполняет усредненное количество землепашцев получаем следующие оценки регрессии:

	<i>Оценка</i>	<i>Стандартная</i>		
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>
α	1465,42	25,5180	57,4269	5,13E-16
β	-6436,1	333,633	-19,291	2,13E-10

Коэффициент детерминации (R^2): 0,97, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 1,129.

В случае, если y_i – усредненная за 4000 периодов численность кочевников, получаем следующие результаты:

	Оценка	Стандартная		
	коэффициентов	ошибка	t-статистика	P-Значение
α	98,1265	3,53152	27,7859	2,92E-12
β	1298,91	46,1726	28,1317	2,52E-12

Коэффициент детерминации (R^2): 0,99, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 2,351.

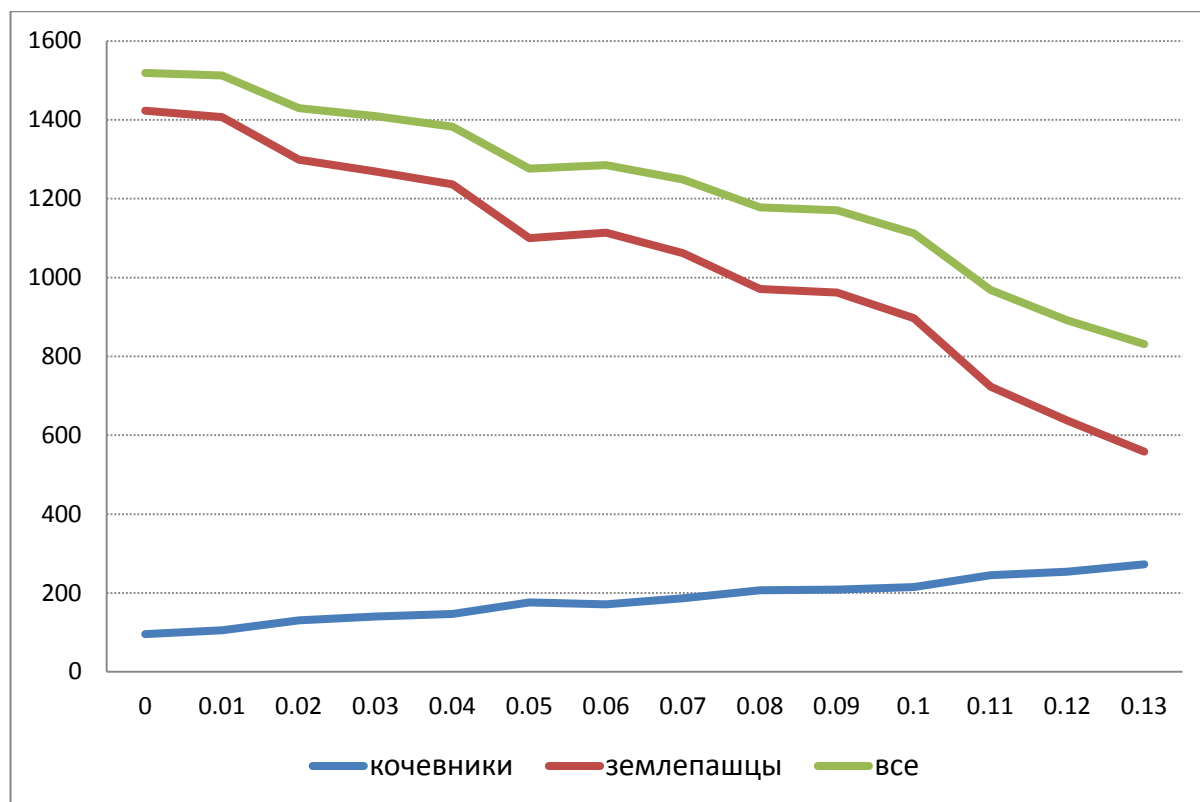


Рисунок 3.11. Усредненная за 4000 периодов численность агентов при различных значениях параметра $growth_rate$.

Анализируя полученные результаты видно, что увеличение параметра $growth_rate$ на 0,01 в среднем уменьшит численность землепашцев на $6436,1 \cdot 0,01 \approx 64,36$ единиц и увеличит численность кочевников на $1298,91 \cdot 0,01 \approx 12,99$ единиц.

На следующем шаге изучим влияние рассматриваемого параметра $growth_rate$ на долю землепашцев по отношению ко всем агентам на ареале. Динамика данного показателя представлена на рисунке 3.10. Для исследования снова построим регрессионную модель, в которой в левой части на месте

зависимой переменной y_i будет стоять усредненная доля землепашцев, объясняющей переменной x_i , как и в двух предыдущих регрессионных моделях, будут присвоены значения параметра $growth_rate$ в диапазоне от 0 до 0,13. Результаты оценок данной регрессионной модели следующие:

	Оценки		Стандартная	
	коэффициентов	ошибка	t-статистика	P-Значение
α	0,96725	0,03418	28,2963	2,35E-12
β	-1,9652	0,44692	-4,3971	0,0009

Коэффициент детерминации (R^2): 0,62, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,489.

Из полученных оценок видно, что при увеличении $growth_rate$ на 0,01 единиц наблюдается снижение доли землепашцев в среднем на $1,967 \cdot 0,01 \approx 0,02$.

Заметим, что в отличие от предыдущих регрессионных моделей, эта модель отличается достаточно низкими показателями как коэффициента детерминации, $R^2 = 0,62$, так и статистики Дарбина-Уотсона на уровне 0,49. Во-первых, это свидетельствует о не очень хорошей объясняющей способности модели, во-вторых, такие значения статистики Дарбина-Уотсона говорят о наличии положительной автокорреляции ошибок, что в свою очередь мешает использовать ее в целях прогнозирования.

Попробуем построить более удачную модель, сделав предположение, что доля землепашцев зависит не только от $growth_rate$, но и от квадрата значения этой величины. То есть рассмотрим следующую модель:

$$y_i = \alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i.$$

Переменные x_i и y_i здесь такие же как и в предыдущем случае. Для новой модели получаем следующие оценки неизвестных параметров:

	<i>Оценка</i>	<i>Стандартная</i>	<i>t-</i>	
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>статистика</i>	<i>P-Значение</i>
α	0,92170	0,00960	96,0333	1,95E-17
β_1	-0,2425	0,34284	-0,7074	0,49404
β_2	-13,455	2,54268	-5,2918	0,00026

Коэффициент детерминации (R^2): 0,98, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 1,553.

Коэффициент детерминации немного не дотягивает до 1, следовательно, объясняющая способность данной модели очень высокая. Для 5% уровня значимости статистики Дарбина-Уотсона, в случае с двумя объясняющими переменными значения величин d_L и d_U равны соответственно 0,91 и 1,55, следовательно, т.к. выполнено $DW=1,553 > d_U=1,55$, то на данном уровне значимости гипотеза об отсутствии автокорреляции ошибок для рассматриваемой модели принимается. Если теперь посмотреть на уровень значимости коэффициентов регрессии α , β_1 и β_2 , то первый и третий значимы ну уровне менее чем 1% значимости, а вот коэффициент β_1 оказался не значим. Несмотря на это проведем анализ построенной модели.

Рассматривается квадратичная функциональная зависимость вида $f(x) = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Учитывая отрицательный знак β_2 , данная функция имеет максимум, который достигается при $x = -\beta_1/\beta_2$, который в нашем случае будет в отрицательной зоне. Следовательно, увеличивая x в положительной области, исходная функция будет уменьшаться, причем темп ее уменьшения будут только увеличиваться, т.к. первая и вторая производные меньше нуля.

Далее, проведем анализ как именно меняется усредненное за 4000 периодов число родившихся кочевников и землепашцев в зависимости от параметра $growth_rate$. На рисунке 3.12 данная динамика представлена графически. Построим соответствующую линейную регрессию, левая часть которой y_i будет характеризовать либо число родившихся кочевников, либо землепашцев, объясняющая переменная x_i будет принимать значения от 0 до 0,13 с шагом 1. В

случае с землепашцами получаем следующие результаты применения регрессионного анализа:

	Оценки		Стандартная	
	коэффициентов	ошибка	t-статистика	P-Значение
α	49,399	0,93696	52,722	1,43E-15
β	-217,59	12,2502	-17,762	5,55E-10

Коэффициент детерминации (R^2): 0,96, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 1,201.

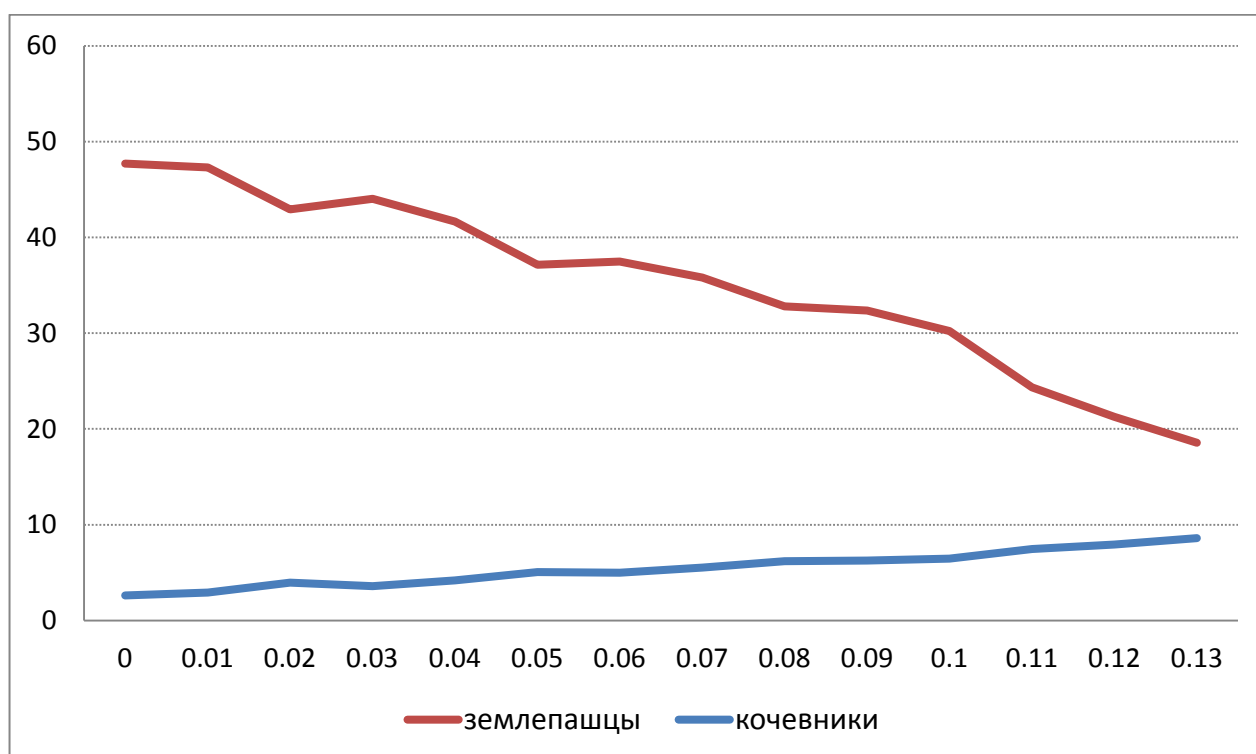


Рисунок 3.12. Усредненное за 4000 периодов количество родившихся кочевников и землепашцев при различных значениях параметра *growth_rate*.

В случае с кочевниками получаются следующие результаты:

	Оценки		Стандартная	
	коэффициентов	ошибка	t-статистика	P-Значение
α	2,55776	0,14306	17,8793	5,14E-10
β	43,8329	1,87039	23,4352	2,18E-11

Коэффициент детерминации (R^2): 0,98, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 2,174.

Из полученных регрессионных оценок следует, что увеличение темп роста дикого ресурса на $0,01$ увеличивает рождаемость землепашцев в среднем на $217,6 \cdot 0,01 \approx 2,2$, для кочевников при этом увеличение этого показателя будет на уровне $43,8 \cdot 0,01 \approx 0,4$.

Серия экспериментов #3

В данной серии экспериментов, также как и в серии экспериментов #1, будет изучено влияние параметра, характеризующего размер ареала – dim на динамику системы. Однако в отличие от первой серии экспериментов длительность прогонов будет увеличена с 4000 до 20000 периодов и будет изучен вопрос выживания каждого из видов агентов. Для каждого из значений dim в диапазоне от 35 до 50 проведена серия экспериментов и составлена статистика сколько раз какой из видов агентов не дожил до 20000 периода. Получилась следующая картина.

dim	Землепашцы выживают		Кочевники выживают		Оба сообщества выживают	
	кол-во	%	кол-во	%	кол-во	%
35	13	50	12	46,2	1	3,8
36	11	50	7	31,8	4	18,2
37	15	57,7	9	34,6	2	7,7
38	10	16,7	20	33,3	30	50
39	11	39,3	11	39,3	6	21,4
40	16	40	14	35	10	25
41	17	50	9	26,5	8	23,5
42	9	28,1	8	25	15	46,9
43	4	13,3	9	30	17	56,7
44	3	9,7	14	45,2	14	45,2
45	6	18,8	9	28,1	17	53,1
46	8	25,8	9	29	14	45,2

47	4	12,9	8	25,8	19	61,3
48	4	12,5	7	21,9	21	65,6
49	2	6,3	8	25	22	68,8
50	9	14,5	14	22,6	39	62,9

Таблица 3.1. Количество и процентное соотношение прогонов, при которых к 20000 периоду выживают либо земляницы, либо кочевники, либо выживают оба сообщества для каждого из значений параметра dim .

Необходимо отметить, что учтены результаты только тех прогонов, при которых к 1000 периоду модельного времени представители обоих видов агентов живы. Сделано это для того, чтобы не брать в расчет те сценарии, при которых вымирание одного из видов агентов наступает до того как этот вид вышел на свой стационарный уровень развития. Другими словами необходимо исключить влияние начального распределения агентов в нулевой момент времени, которое носит случайный характер.

На рисунке 3.13 приведен график данных приведенные в таблице 3.1, а именно по оси ординат отложены проценты, характеризующие частоту реализации одного из трех исходов, по оси абсцисс отложены значения размера ареала dim .

Из графика видно, что с увеличением размеров ареала к 20000 периоду вероятность наблюдать на ареале представителей обеих видов агентов в среднем увеличивается и превышает 60%.

Отдельно проанализируем сценарии, когда одно из сообществ вымирает, т.е. без учета случаев, когда оба сообщества выживают. Для этого рассмотрим таблицу 3.13.

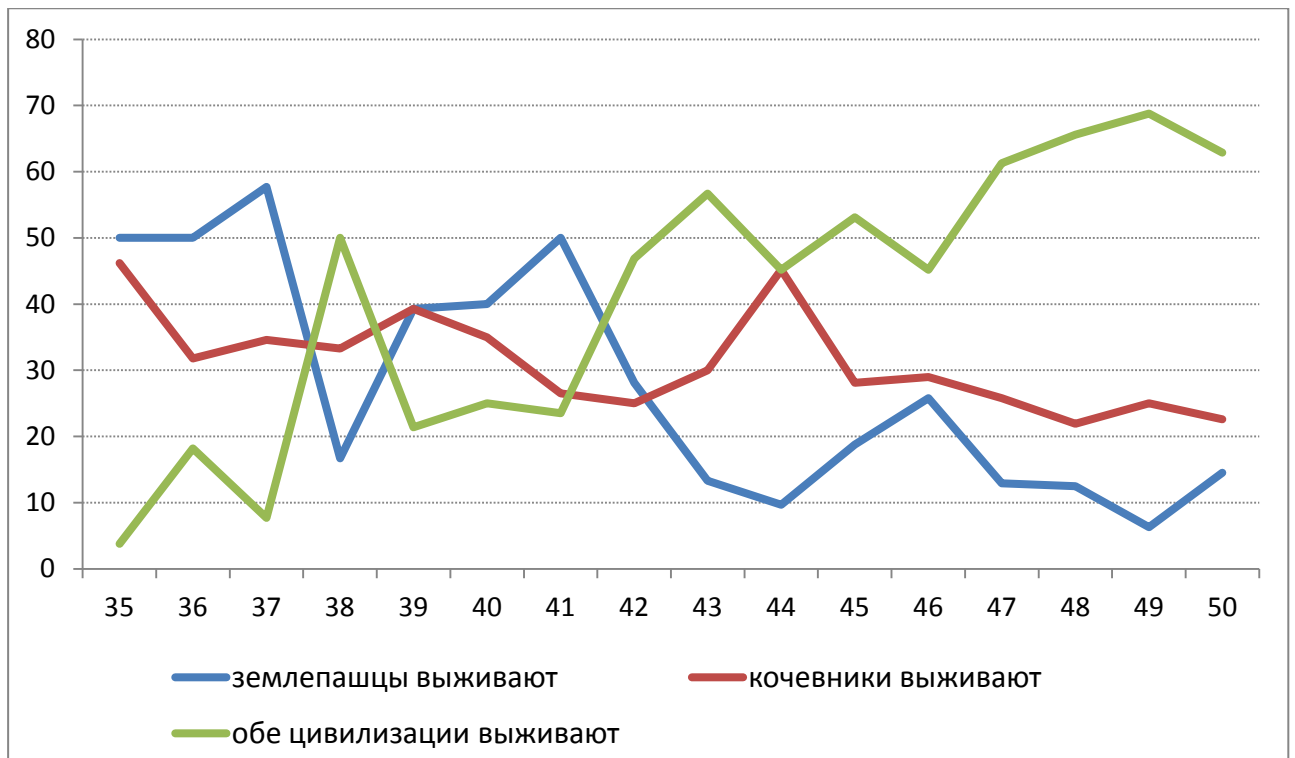


Рисунок 3.13. Процентное соотношение трех возможных исходов в зависимости от параметра dim .

dim	землепашцы выживают			кочевники выживают		
	кол-во	%	средний период вымирания кочевников	кол-во	%	средний период вымирания землепашцев
35	13	52	7431	12	48	9438
36	11	61,1	5509	7	38,9	8137
37	15	62,5	6325	9	37,5	5865
38	10	33,3	10358	20	66,7	6824
39	11	50	5444	11	50	9787
40	16	53,3	9826	14	46,7	7801
41	17	65,4	8661	9	34,6	9386
42	9	52,9	6426	8	47,1	9041
43	4	30,8	14909	9	69,2	7713
44	3	17,6	7630	14	82,4	9230

45	6	40	6193	9	60	9923
46	8	47,1	9987	9	52,9	8982
47	4	33,3	9294	8	66,7	7897
48	4	36,4	5974	7	63,6	4174
49	2	20	9541	8	80	13148
50	9	39,1	11693	14	60,9	11204

Таблица 3.2. Количество и процентное соотношение прогонов, при которых к 20000 периоду наблюдается исчезновение одного из сообществ.

Изобразим на графике динамику изменения доли тех прогонов, при которых наблюдается выживание землепашцев без учета случаев, когда к 20000 периоду остаются обе цивилизации. Другими словами изобразим на графике третий столбец предыдущей таблицы хх.

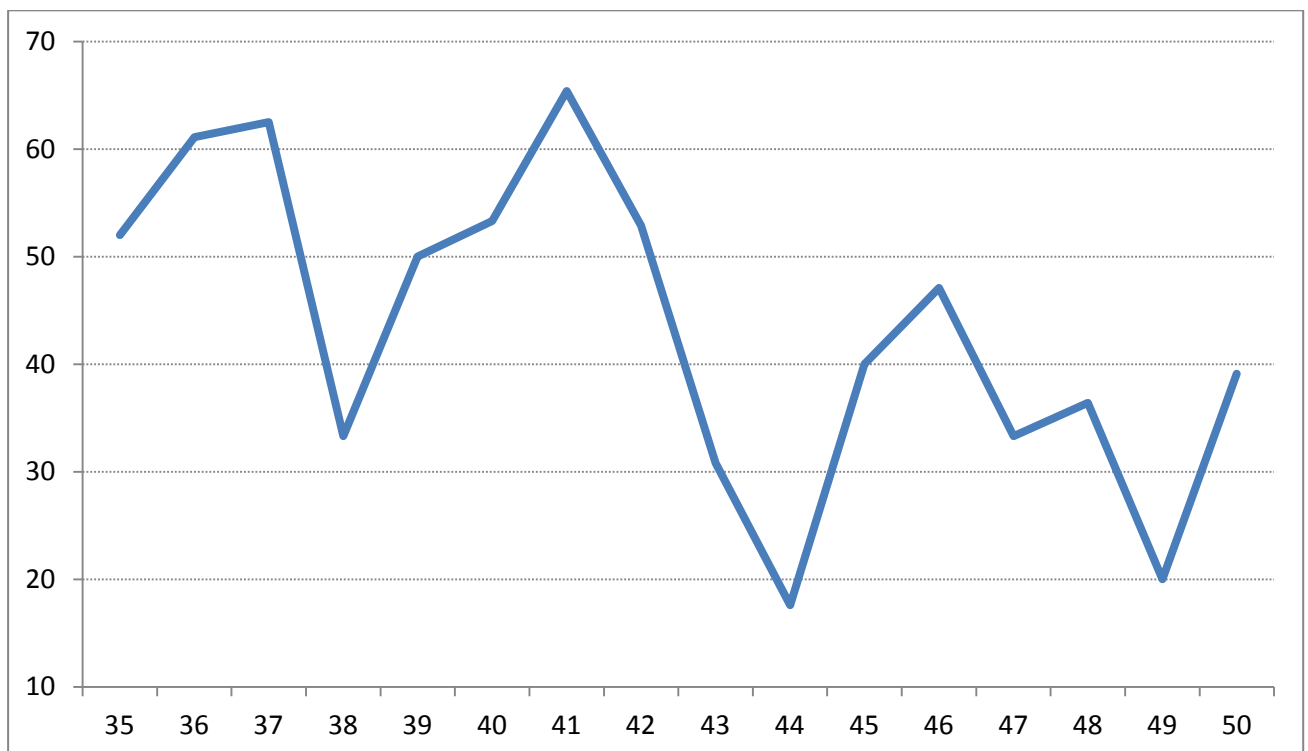


Рисунок 3.14. Доля прогонов, в которых выживают землепашцы, в случаях, когда за 20000 периодов в живых остается только одно из двух сообществ.

Из графика, изображенного на рисунке 3.14 видно, что в некотором смысле пороговым значением является значение размера ареала $dim = 42$. При данном

значении размера ареала процент выживания у землепашцев равен 52,9%, при меньших значениях этого параметра, не считая точки $dim = 38$, которая является скорее исключением, вероятность выжить у землепашцев выше (либо равна в точке $dim = 39$) чем у кочевников. При dim больше чем 42 значение этого показателя для землепашцев падает ниже 50%, то есть, с увеличением размеров ареала вероятность выжить для землепашцев уменьшается, а для кочевников, соответственно, увеличивается.

Объяснение этому факту может быть следующим, основной деятельностью кочевников, которая позволяет им выжить, это поиск ресурса (дикого либо культурного) на ареале. Таким образом для того чтобы выжить им нужно постоянно двигаться и чем больше будет то пространство по которому они могут передвигаться, тем больше шансов к выживанию.

При достаточно детальном рассмотрении данные результаты согласуются с результатами первой серии экспериментов, в рамках которого было получено, что с ростом параметра dim наблюдается увеличение численности, как кочевников, так и землепашцев (рисунок 3.9). В данной серии экспериментов этому результату можно сопоставить то, что с ростом размеров ареала для обоих видов сообществ вероятность к 20000 периоду выжить также увеличивается.

Далее разберем четвертый и седьмой столбец таблицы 3.2., в которых приведено среднее время вымирания кочевников и землепашцев, соответственно. На рисунке 3.15 приведем график изменения этих величин в зависимости от размеров ареала.

Если проанализировать время вымирания соответствующего вида агентов в тех случаях, когда такое вымирание наблюдается, то видно, что в среднем по всем рассмотренным размерам ареала вымирание кочевников наступает в 8450 период, для землепашцев этот показатель равен 8659. Понятно, что если увеличить протяженность расчета с 20000 скажем до 25000, то среднее время жизни сообществ также заметно вырастет.



Рисунок 3.15. Среднее время вымирания кочевников и земледельцев в зависимости от размеров ареала .

Интересно также оценить какая наблюдается локализация агентов на ареале в среднем за все периоды развития системы. Рассчитаем показатели, характеризующие количество появлений кочевников и земледельцев в каждой из клеток ареала. Алгоритм подсчета следующий – для каждой клетки ареала размером $dim \times dim$ считаем сколько периодов за все время наблюдения в данной клетке находился агент из класса земледельцев. Аналогично в каждой клетки ареала считаем этот показатель для кочевников. Таким образом, получаются две матрицы A и B размерности $dim \times dim$. Так, элемент $A_{1,1}$ будет отвечать за количество появления земледельцев в верхней левой клетки ареала, элемент $B_{1,dim}$ будет отвечать за то, сколько раз представитель племени кочевников появился в верхней правой клетки ареала. Введем также в рассмотрение следующие величины – $a_k^1 = \sum_{i=1}^{dim} A_{i,k}$ и $a_k^2 = \sum_{i=1}^{dim} A_{k,i}$. Эти показатели можно интерпретировать в некотором смысле как проекцию столбцов матрицы A на горизонтальную ось (a_k^1) и строк матрицы A на вертикальную ось

(a_k^2). Аналогично относительно матрицы B могут быть рассчитаны показатели b_k^1 и b_k^2 . Для случая $dim = 50$ и количество периодов 20000 на рисунке 3.16 выведем графики этих показателей. Рассмотрим репрезентативный прогон данной модели, при котором к 20000 периоду сосуществуют популяции обоих видов.

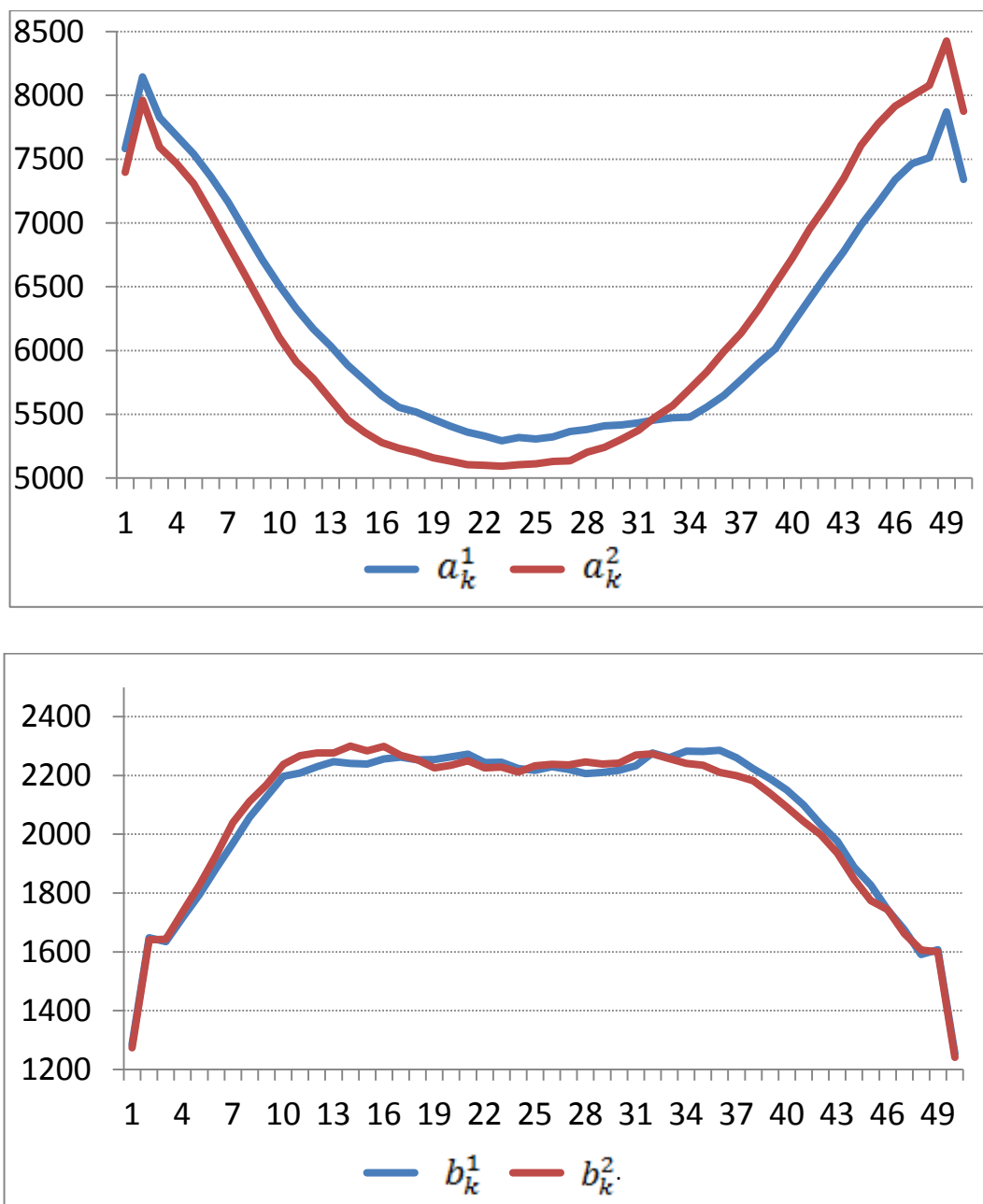


Рисунок 3.16. Характеристика локализации землепашцев (верхний график) и кочевников (нижний график) на ареале.

Таким образом, видно, что землепашцы в большей степени живут ближе к краю ареала, тогда как кочевники ближе к центру. При этом в самом центре

рассматриваемый показатель для кочевников немного ниже максимальных значений. Получается, что кочевники вытесняют землепашцев из центра ареала на его край, при этом самый центр им чуть менее предпочтителен, поскольку кочевникам не выгодно удаляться далеко от землепашцев, т.к. в случае, если они граничат с землепашцами у них есть возможность питаться как диким, так и культурным ресурсом, который может быть отнят у этих землепашцев.

Отдельно проанализируем показатели, характеризующие частоту, с которой агенты меняют место своего расположения. Для получения данного показателя в каждый период подсчитывается количество агентов, поменявших свое месторасположение и делится на общее количество агентов в текущий момент времени. Таким образом, в каждый период времени рассчитывается доля агентов, совершивших перемещение. Экспериментально было обнаружено, что эта доля в среднем не меняется от периода к периоду и для каждого типа агентов может быть принята за некоторую константу. Для землепашцев доля перемещающихся агентов равна 55,5%, для кочевников такая доля равна 69,6%. Данные результаты согласуются с интуицией, которая говорит о том, что кочевники должны передвигаться заметно больше, чем землепашцы.

Серия экспериментов #4

Так же как и в серии экспериментов #2, в этой серии экспериментов изучим влияние параметра, характеризующего темп роста дикого ресурса *growth_rate*. Однако в этой серии экспериментов, так же как и в предыдущей серии экспериментов #4, будет изучаться вопрос выживания каждого из видов агентов на более длинных интервалах времени, а именно на интервале в 19000 периодов. В данной серии экспериментов параметр *growth_rate* будет варьироваться в диапазоне от 0,093, до 0,11. После проведения серии экспериментов получились следующие результаты.

<i>growth_rate</i>	Землепашцы ВЫЖИВАЮТ		Кочевники ВЫЖИВАЮТ		Оба сообщества ВЫЖИВАЮТ	
	КОЛ-ВО	%	КОЛ-ВО	%	КОЛ-ВО	%
0,093	3	9,4	1	3,1	28	87,5
0,094	6	18,8	0	0	26	81,3
0,095	8	12,5	3	4,7	53	82,8
0,096	4	12,5	5	15,6	23	71,9
0,097	6	18,8	5	15,6	21	65,6
0,098	5	16,1	3	9,7	23	74,2
0,099	4	12,9	2	6,5	25	80,6
0,1	9	14,5	14	22,6	39	62,9
0,101	3	9,7	6	19,4	22	71
0,102	0	0	8	25,8	23	74,2
0,103	1	3,4	8	27,6	20	69
0,104	0	0	16	51,6	15	48,4
0,105	8	12,7	20	31,7	35	55,6
0,106	0	0	14	46,7	16	53,3
0,107	0	0	23	76,7	7	23,3
0,108	1	3,3	18	60	11	36,7
0,109	3	9,7	14	45,2	14	45,2
0,11	1	3,4	22	75,9	6	20,7

*Таблица 3.3. Количество и процентное соотношение прогонов, при которых к 19000 периоду выживают либо землепашцы, либо кочевники, либо выживают оба сообщества для каждого из значений параметра *growth_rate*.*

При этом, также как и в предыдущей серии экспериментов, в расчет не будут браться те прогоны, в которых исчезновение одного из видов агентов наступает менее чем за 1000 периодов. Причина аналогична – в этом случае вымирание одного из видов агентов может наступать в результате такого

случайного начального распределения всех агентов, при котором данный вид мог не успеть достичь своего равновесного уровня развития.

Представленные в приведенной таблице 3.3 данные на графике примут следующий вид:

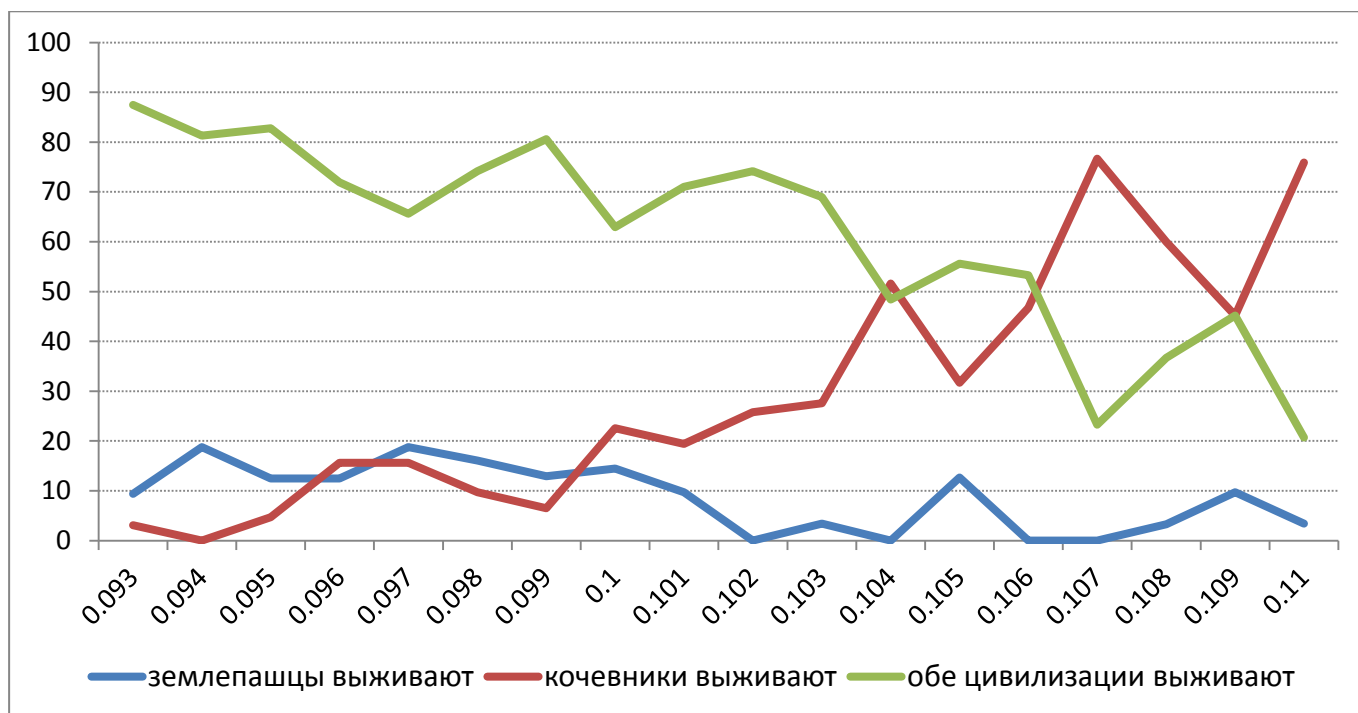


Рисунок 3.17. Процентное соотношение трех возможных исходов в зависимости от параметра *growth_rate*.

Видно, что увеличение параметра *growth_rate* благотворно сказывается на кочевниках и негативно на землепашцах. Эти результаты согласуются с результатами серии экспериментов #2, в котором такие же выводы были сделаны на основе исследования усредненного за 4000 периодов количества кочевников и землепашцев.

Отдельно проанализируем случаи, когда наблюдается исчезновение одного из вида агентов без учета прогонов, в которых к 19000 периоду в живых остались как кочевники, так и землепашцы.

<i>growth_rate</i>	землепашцы выживают			кочевники выживают		
	кол-во	%	средний период вымирания кочевников	кол-во	%	средний период вымирания землепашцев
0,093	3	75	8890	1	25	1151
0,094	6	100	9761	0	0	-
0,095	8	72,7	11833	3	27,3	12303
0,096	4	44,4	6961	5	55,6	7041
0,097	6	54,5	10184	5	45,5	11033
0,098	5	62,5	8055	3	37,5	8096
0,099	4	66,7	13516	2	33,3	4513
0,1	9	39,1	11693	14	60,9	11204
0,101	3	33,3	11211	6	66,7	8962
0,102	0	0	-	8	100	11379
0,103	1	11,1	11443	8	88,9	7849
0,104	0	0	-	16	100	9373
0,105	8	28,6	8082	20	71,4	8175
0,106	0	0	-	14	100	7471
0,107	0	0	-	23	100	9493
0,108	1	5,3	2141	18	94,7	7332
0,109	3	17,6	10709	14	82,4	8270
0,11	1	4,3	17253	22	95,7	8262

Таблица 3.4. Количество и процентное соотношение прогонов, при которых к 19000 периоду наблюдается исчезновение одного из сообществ.

На рисунке 3.18 приведенные в таблице 3.4 данные представлены в виде графика. Другими словами на рисунке 3.4 показано как меняется доля тех прогонов, в которых выживают землепашцы, от всех прогонов, в которых наблюдается гибель одного из видов агентов (без учета прогонов, в которых выживают и кочевники и землепашцы).

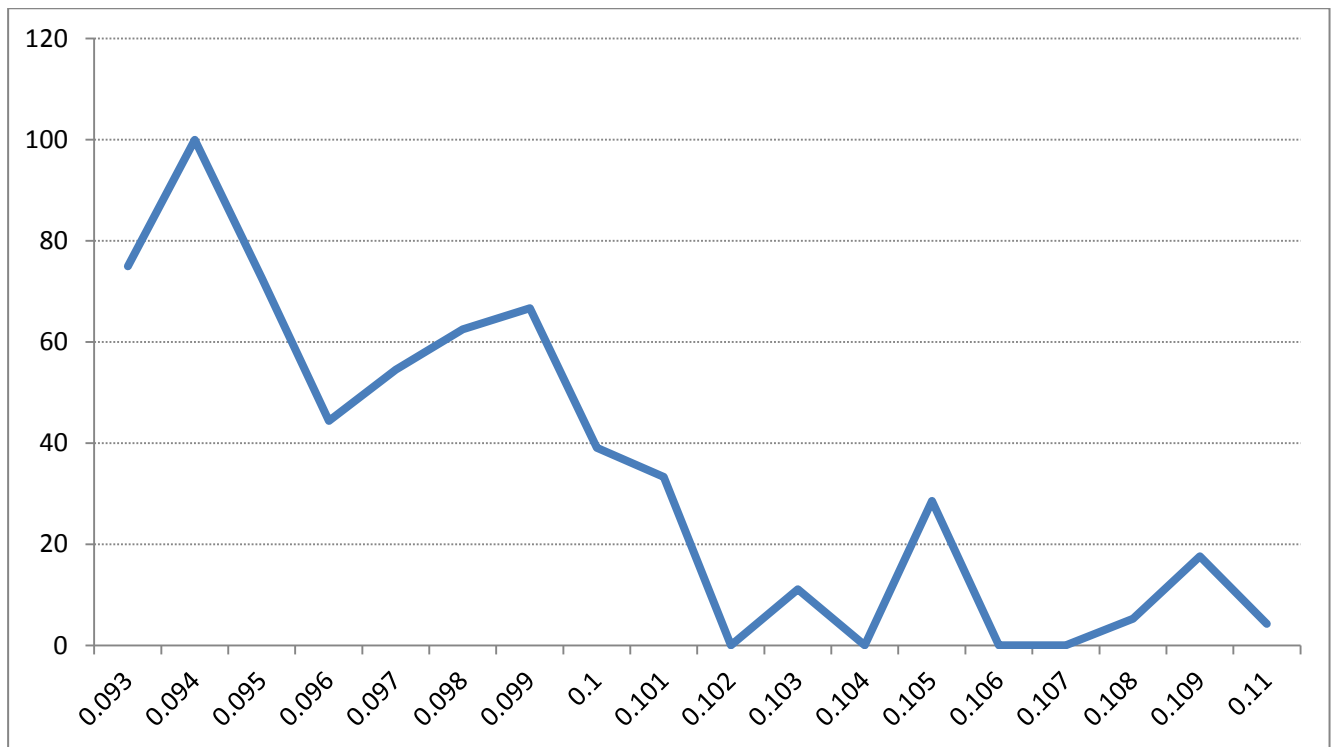


Рисунок 3.18. Доля прогонов, в которых выживают землепашцы, в случаях, когда за 19000 периодов в живых остается только одно из двух сообществ.

Значение параметра $growth_rate = 0,1$ можно считать пороговым значением, т.к. при условии, что за 19000 периодов один из видов агентов должен исчезнуть, при $growth_rate \leq 0,1$ (не считая случая $growth_rate = 0,096$, которое является исключением) вероятность выжить у землепашцев будет выше 50%. При значениях параметра выше указанного уровня данная вероятность резко снижается и на рассматриваемой выборке экспериментов в некоторых случаях достигает нулевых отметок.

Отдельно на рисунке 3.19 изобразим как меняется среднее время вымирания каждого из видов агентов, при условии, что исчезновение одного из видов происходит не позже 19000 периода. Эти данные соответствуют четвертому и седьмому столбцу приведенной таблицы 3.4 (недостающие элементы заполняются с помощью линейной интерполяции).



Рисунок 3.19. Среднее время вымирания кочевников и земледельцев в зависимости от размеров ареала.

Не считая некоторых выбросов, также как и в предыдущем эксперименте можно предположить, что для всех значений параметра *growth_rate* математическое ожидание времени исчезновения каждого из сообществ является случайной величиной, не зависящей от указанного параметра. Среднее значение времени вымирания земледельцев для всех рассмотренных значений параметра *growth_rate* составляет 10124, значение этого показателя для кочевников лежит на уровне 8347.

Обобщая полученные в данном эксперименте результаты можно отметить, что увеличение темпов роста дикого ресурса плохо сказывается на живучести земледельцев и хорошо на живучести кочевников. Одно из объяснений достаточно простое – чем больше дикого ресурса, тем больше шансов у кочевников выжить без культурного ресурса, который они отнимают у земледельцев. В пределе кочевники истребляют всех земледельцев и остаются единственным видом на ареале, достигнув некоторого равновесного уровня, вокруг которого будет

колебаться их численность. С другой стороны, при низких уровнях темпов роста дикого ресурса заметно возрастает вероятность сосуществования обеих видов на длительных интервалах времени. Но если все таки при таких значениях *growth_rate* происходит вымирание одного из видов, то скорее всего это будут кочевники.

Выводы

В исследуемом диапазоне параметров выявлено как меняется динамика модели в зависимости от изменения её параметров. Варьируя параметр, отвечающий за размеры ареала *dim* в диапазоне от 40 до 60, определены характеристики модели, которые остаются неизменными, при этом закон изменения других характеристик носит в основном линейных характер. На основе методов математической статистики показано, что усредненная плотность населения представителей популяции обоих видов в среднем не изменяется. Также была показана неизменность средней доли землепашцев при различных значениях параметра *dim*. Полученные результаты говорят о том, что качественно при изменении размеров ареала модель не меняется за наблюдаемое в экспериментах время – 40000 периодов.

Выявлена линейная зависимость от параметра *dim* таких характеристик модели, как усредненная численность кочевников и землепашцев, а также средняя рождаемость обоих видов агентов. На основе регрессионного анализа была дана оценка коэффициентов соответствующих линейных моделей.

С другой стороны, при изучении модели на более длинных интервалах времени были выявлены качественные изменения в динамике модели при изменении размеров ареала. Оказалось, что чем больше размер ареала, тем выше вероятность того, что оба вида агентов будут сосуществовать. Напротив, если рассматривать ареалы небольшого размера, то, скорее всего, в достаточно длительной перспективе в живых останется только один вид агентов и с большей вероятностью это будет землепашцы.

При изучение влияния темпов роста дикого ресурса (*growth_rate*) было показано, что модель может развиваться по двум сценариям развития ситуации. Если темпы роста дикого ресурса относительно велики, то за наблюдаемое в экспериментах время наблюдается полное вымирание землепашцев. В этом случае кочевники остаются единственным видом на ареале, дикого ресурса им вполне хватает для приемлемого существования. Объясняется это тем, что при достаточном объеме дикого ресурса его начинают потреблять не только кочевники, но и землепашцы, тем самым землепашцы для кочевников начинают восприниматься не как агенты способные производить еще и культурный ресурс, а как конкуренты на дикий ресурс, в следствии чего наблюдается полное истребление землепашцев кочевниками.

При достаточно низком темпе роста дикого ресурса вероятность сосуществования обоих типов агентов на ареале на относительно больших интервалах времени достаточна высока. При этом для землепашцев низкий уровень *growth_rate* дает более выгодные условия – вероятность того, что именно они выживут выше, чем у кочевников. С ростом параметра *growth_rate* ситуация меняется, для кочевников вероятность остаться единственным видом на ареале увеличивается, соответственно для землепашцев она уменьшается. Вероятность сосуществования обоих видов с ростом *growth_rate* также снижается.

3.2. Модификация модели «кочевников» и «землепашцев» с ограничением на передвижения агентов

В данном разделе будет рассмотрена модификация исходной модели, в которой накладываются дополнительные ограничения на передвижения агентов. В рамках этой модификации будем подразумевать, что представители популяции обоих типов не могут удаляться от места своего рождения дальше экзогенно заданного расстояния. Иными словами и землепашцы и кочевники могут перемещаться в пределах некоторой области, которая определяется с помощью

места рождения каждого из рассматриваемых агентов. Чаще всего эта область имеет форму квадрата, либо прямоугольника, если агент родился рядом с границей ареала.

Очевидно, новое ограничение более негативно отразится на кочевников, чем на землепашцев, т.к. именно способность к перемещению обеспечивает кочевникам возможность находить больше ресурса, отнимая его у землепашцев, либо отыскивая дикий ресурс. Землепашцам способность к перемещению не так важна, т.к. для того чтобы прокормить себя единственное что им нужно – это немного свободного пространства вокруг себя, которое можно засеять и получить культурный ресурс с целью его дальнейшего потребления.

Проведем серию экспериментов. Новый экзогенный параметр, который отвечает за максимально возможное удаление агента от места своего рождения, будет обозначен через *radios*.

Эксперименты подтвердили предположения о том, что кочевникам стало сложнее выживать. Во всех экспериментах продолжительностью 15000 периодов наблюдается исчезновение кочевников. Полное вымирание наступает в среднем к 4731 периоду (при этом в расчет брались только те эксперименты, в которых смерть всех кочевников наступала после 1000 периода). Ниже более подробно рассмотрим случай, когда значения параметра *radios* превышают 3.

<i>radios</i>	Землепашцы выживают		Кочевники выживают		Оба сообщества выживают	
	кол-во	%	кол-во	%	кол-во	%
4	2	2,7	0	0	73	97,3
5	3	2	0	0	146	98
6	4	6,6	0	0	57	93,4
7	11	17,5	3	4,8	49	77,8
8	10	15,6	4	6,3	50	78,1
9	10	15,9	11	17,5	42	66,7

10	2	3,2	7	11,1	54	85,7
11	7	11,1	10	15,9	46	73
12	7	10,9	6	9,4	51	79,7
13	3	9,4	4	12,5	25	78,1
14	3	9,4	6	18,8	23	71,9
15	7	11,3	10	16,1	45	72,6
16	8	12,7	10	15,9	45	71,4
∞	6	9,7	11	17,7	45	72,6

Таблица 3.5. Количественное и процентное соотношение каждого из исходов в зависимости от параметра *radius*.

В самой нижней строке приведены результаты экспериментов, в которых нет данного ограничения на передвижения агентов, т.е. взяты результаты экспериментов из предыдущего раздела. В таблице 3.5 в расчет взяты только те эксперименты, в которых гибель одного из видов агентов наблюдается с 1000-го периода. Результаты данной таблицы приведены в виде графика на рисунке 3.20.

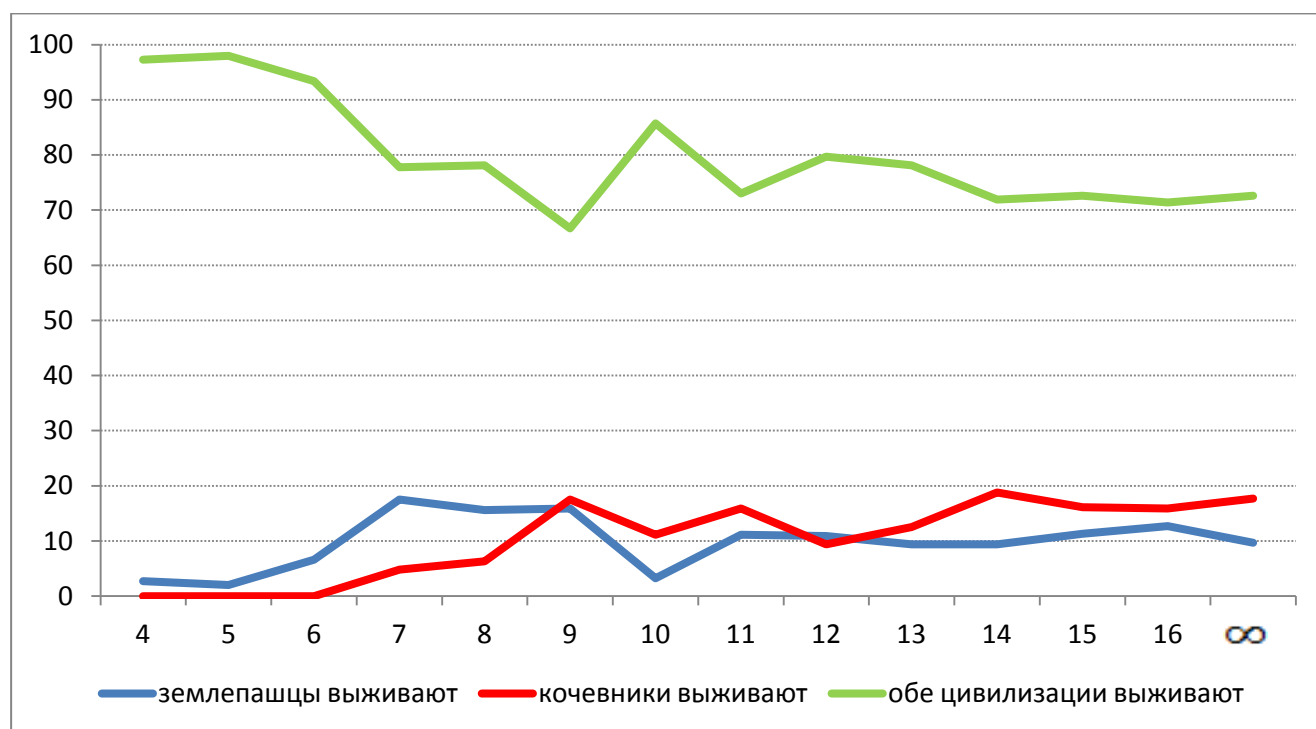


Рисунок 3.20. Процентное соотношение трех возможных исходов в зависимости от параметра *radius*.

Рассмотрим отдельно те эксперименты, в которых происходит либо исчезновение кочевников, либо землепашцев, отбросив эксперименты, в которых к 15000 периоду оба вида агентов сосуществуют. Результаты представлены в таблице 3.6.

<i>radios</i>	Землепашцы выживают			Кочевники выживают		
	кол-во	%	средний период вымирания кочевников	кол-во	%	средний период вымирания землепашцев
4	2	100	3662	0	0	-
5	3	100	5179	0	0	-
6	4	100	8081	0	0	-
7	11	78,6	8444	3	3,7	10106
8	10	71,4	7747	4	5,3	8256
9	10	47,6	8005	11	18,8	6525
10	2	22,2	8011	7	24	9049
11	7	41,2	8479	10	19,5	6876
12	7	53,8	5445	6	10	7799
13	3	42,9	10026	4	8,5	8508
14	3	33,3	9097	6	15,3	7084
15	7	41,2	8564	10	58,8	8850
16	8	44,4	6745	10	55,6	5368
∞	6	35,3	9350	11	23,8	9407

Таблица 3.6. Количественное и процентное соотношение каждого из исходов, при которых к 15000 периоду на ареале остается только один из видов агентов.

Отдельно выведем на график третий столбец представленной таблицы.

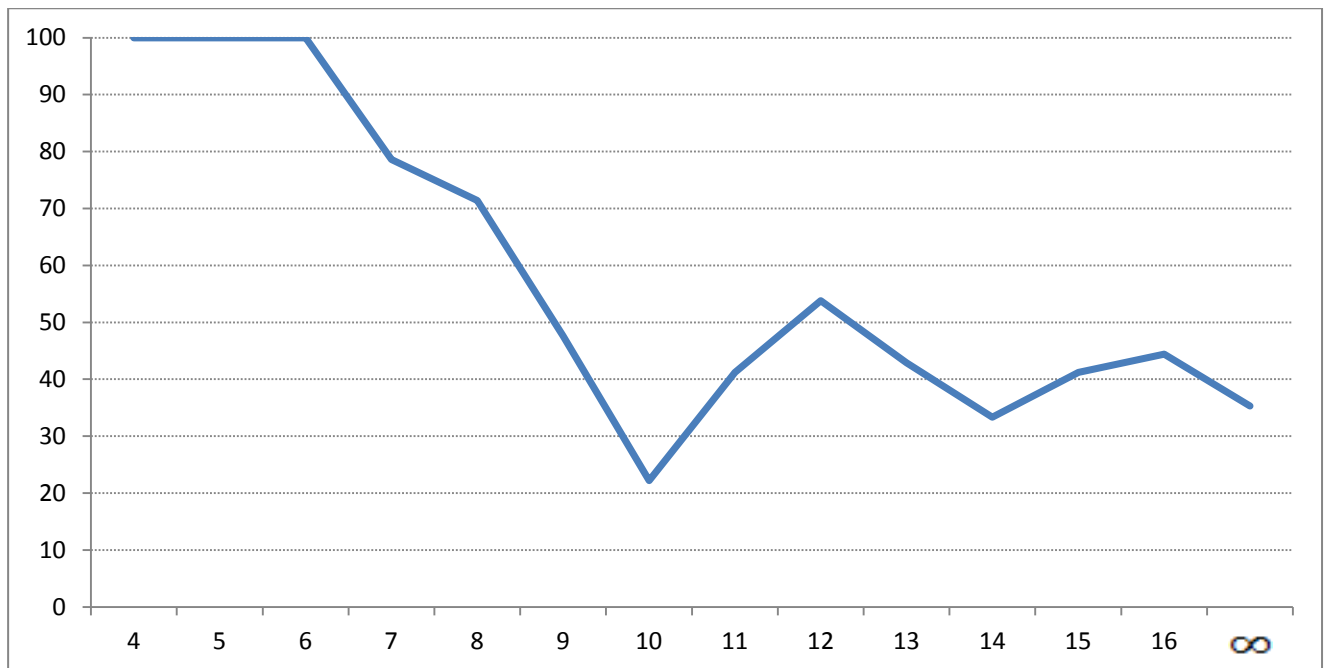


Рисунок 3.21. Доля прогонов, в которых выживают земляницы, в случаях, когда за 15000 периодов в живых остается только одно из двух сообществ.

Также на рисунке 3.22 выведем график, характеризующий средний период вымирания соответствующего сообщества (4 и 7 столбцы).

Из представленных графиков видно, что в случае, когда ограничений на перемещения нет ($radius = \infty$) динамика популяции примерно такая же, как и в случаях, когда значения этого параметра превышают 7 или 8. При значениях этого параметра меньше указанных уровней наличие данного ограничения заметно влияет на динамику модели. Таким образом, можно сделать вывод, что, в исходной модели, в которой данного ограничения нет ($radius = \infty$), агенты всех типов от места своего рождения в среднем перемещаются не дальше 7 или 8 клеток. Если и есть отдельно взятые агенты, которые уходят дальше этого расстояния, то доля таких агентов крайне мала и на общую динамику они не влияют.

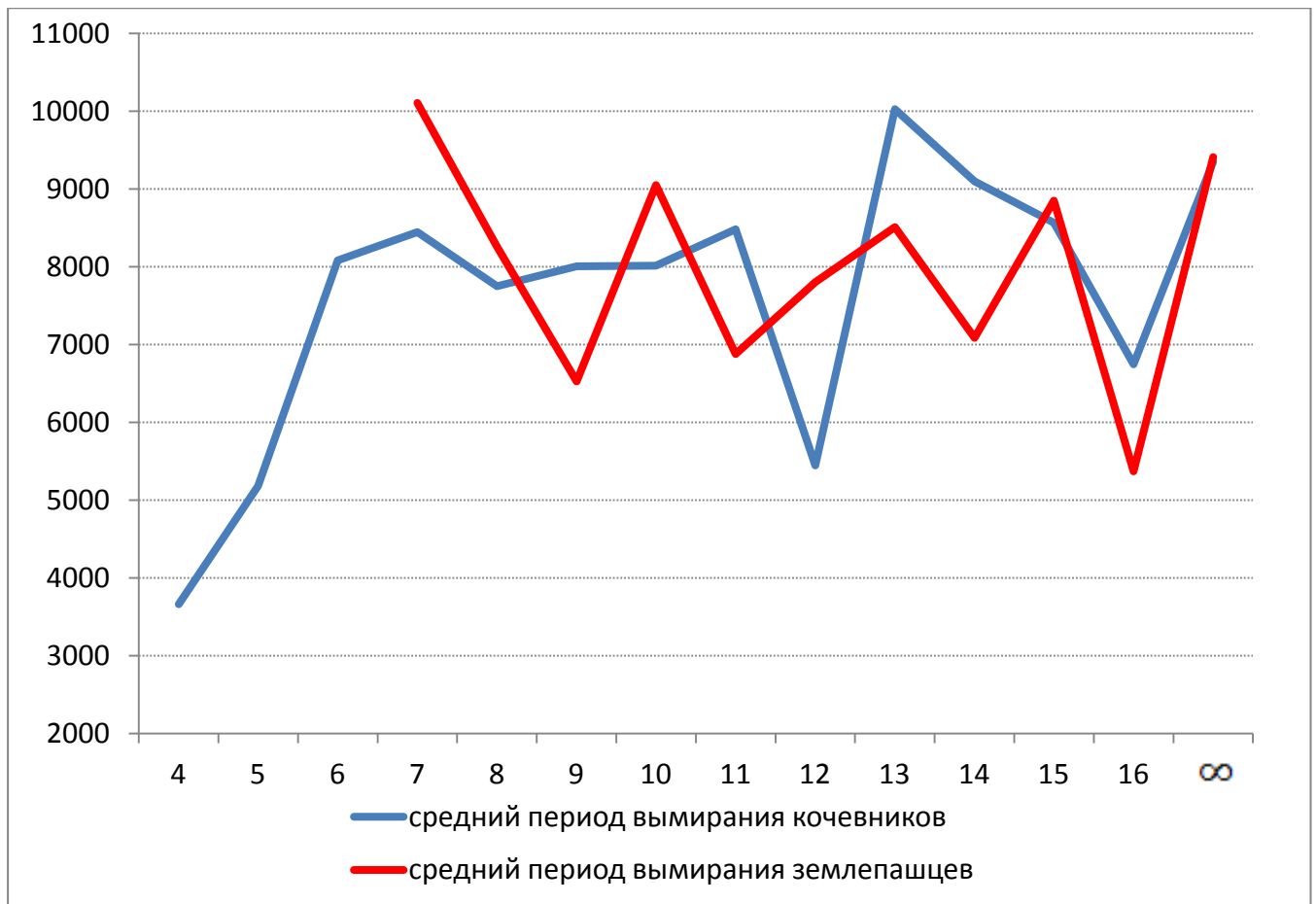


Рисунок 3.22. Среднее время вымирания кочевников и земледельцев в зависимости от параметра *radius*.

Как было показано чуть выше при анализе исходной модели кочевников и земледельцев, вне зависимости от параметра, отвечающего за размер ареала *dim*, плотность населения всех агентов в модели в среднем равна 0,44, плотность населения земледельцев в среднем равна 0,35, усредненная плотность заселения кочевников находится на уровне 0,09. Доля земледельцев по всем значениям параметра *dim* в среднем равна 0,78. Проведем сравнение этих показателей со значениями, которые получатся в случае, если добавить ограничение на перемещения со значение соответствующего параметра на уровне 4 (*radius* = 4). При подсчете будем учитывать только те эксперименты, в которых к 15000 периоду выжили оба вида агентов. Получаем, что в новой модификации плотность населения всех агентов в среднем будет равной 0,59, плотность населения земледельцев будет на уровне 0,52, плотность кочевников в среднем

равна 0,073. Доля землепашцев равна в среднем 0,87. Сравнивая две модификации модели легко видеть, что плотность землепашцев растет примерно на 49%, плотность кочевников падает на 19%, плотность агентов обоих видов растет на 18%. Доля землепашцев растет примерно на 11,5%.

Ниже приведем график одного из экспериментов, когда было зафиксировано исчезновение кочевников к 3791 периоду.

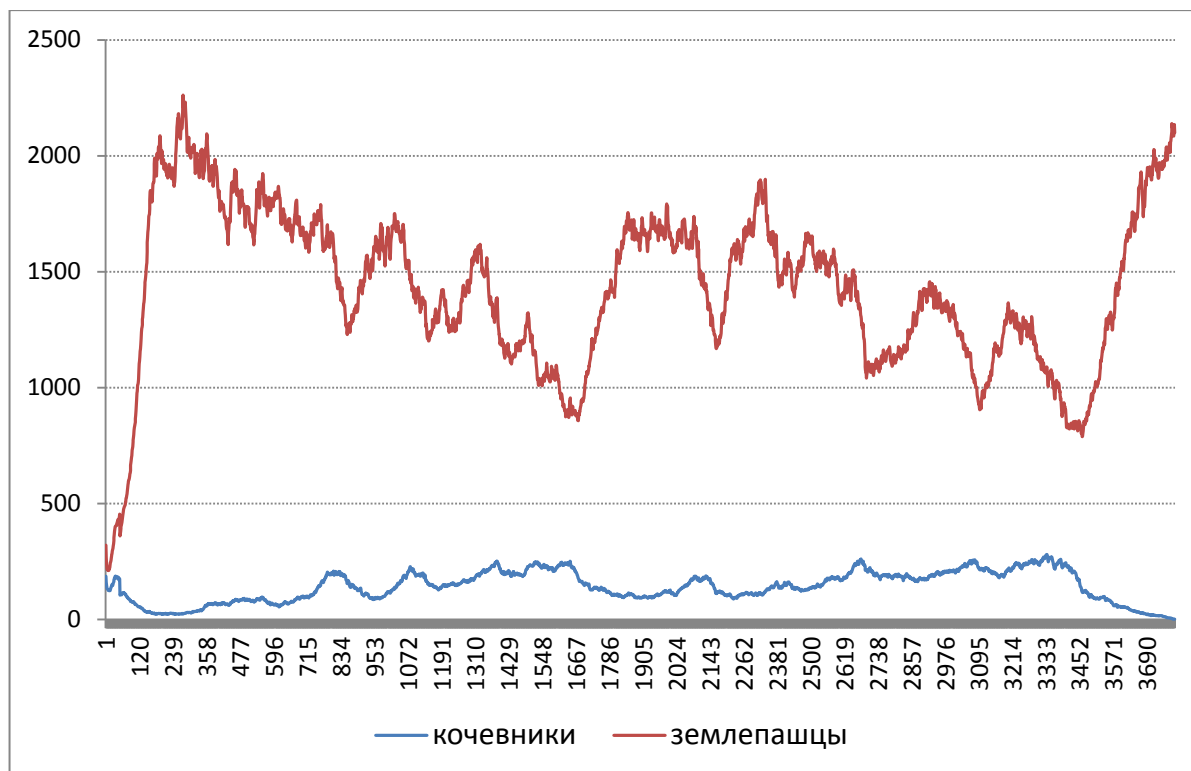


Рисунок 3.23. Динамика численности кочевников и землепашцев в эксперименте, когда кочевники вымирают ($radius = 4$).

3.3. Исследование модели «кочевников» и «землепашцев» с помощью вейвлет-анализа

Введение

Вейвлет-анализ появился примерно в восьмидесятые года прошлого столетия. Его возникновение связано с потребностью проведения более качественных сейсмических исследований, которые до этого осуществлялись методами разложения сигналов сейсмической активности в ряды Фурье. В

дальнейшем вейвлет-анализ нашел свое применение как в прикладной и теоретической физике, так и в ряде математических дисциплинах. Также этот метод активно применяется при обработке сигналов для решения задач архивации, в задачах очистки сигналов от шумов и в решении других подобных задач. Все больше возникает задач обработки временных рядов, таких как финансовые котировки, интернет трафик, распознавание объектов и т.д. в решении которых осуществляется успешное применение вейвлет-анализа.

Примерами работы, в которых активно применяется вейвлет-преобразования в области анализа временных рядов и статистики являются работы [14, 15]. Применение этого инструментария в финансовой сфере можно найти в работе [16].

На рисунках 3.24 и 3.25 можно видеть динамику численности популяций землепашцев и кочевников за 20000 периодов, а также на рисунке 3.26 динамику изменения количества ресурса (как дикого, так и культурного) на ареале также за 20000 периодов.

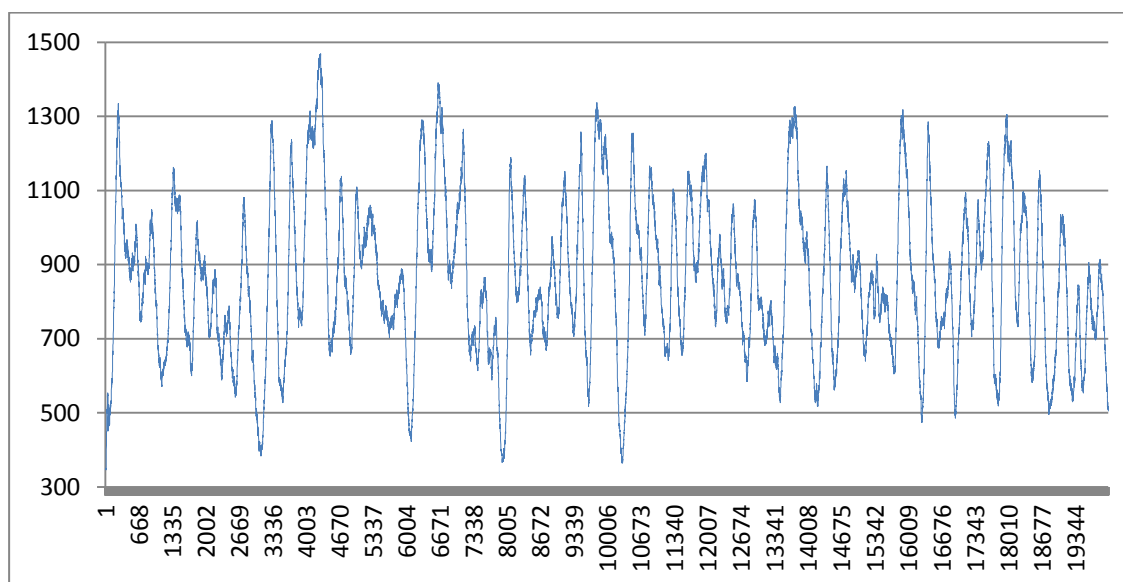


Рисунок 3.24 . Динамика численности популяции землепашцев за 20000 периодов

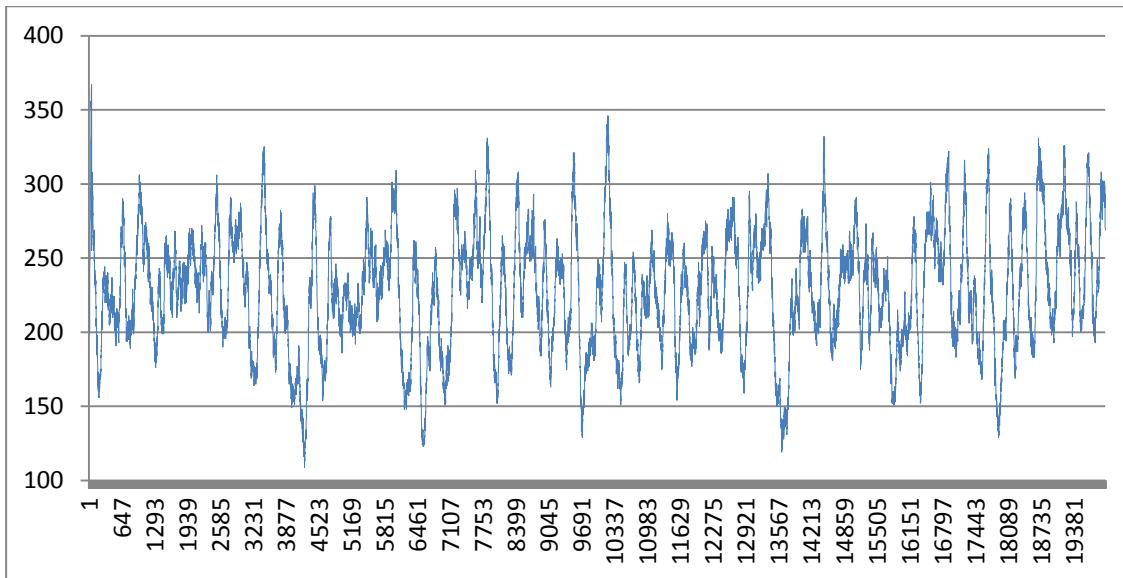


Рисунок 3.25. Динамика численности популяции кочевников за 20000 периодов

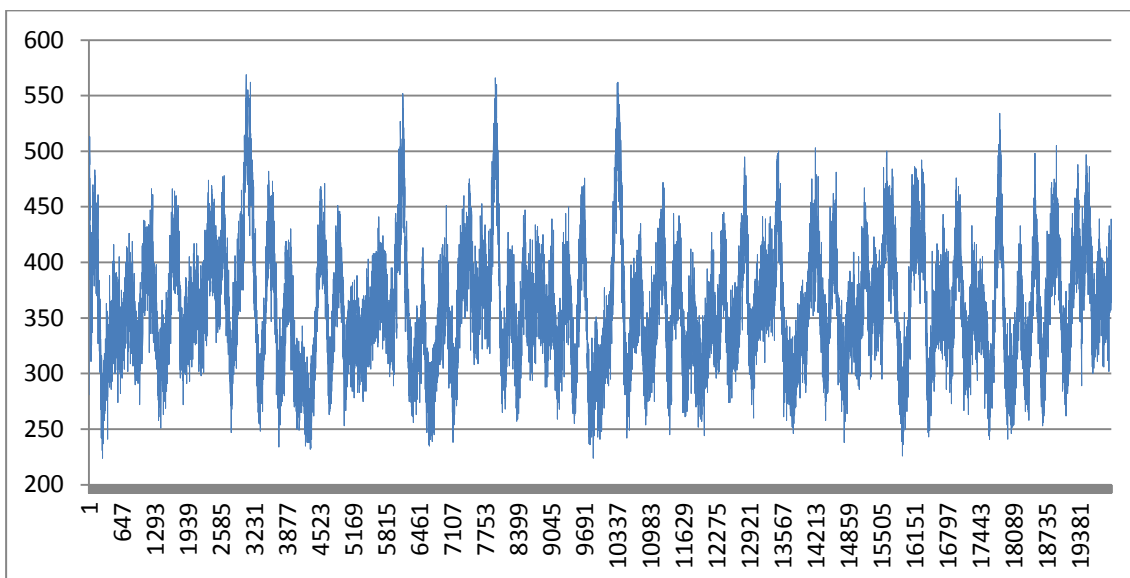


Рисунок 3.26. Динамика количества ресурса на ареале за 20000 периодов.

Приведем корреляционную матрицу представленных временных рядов:

	кочевники	землепашцы	ресурс
кочевники	1	-0,4138	-0,0023
землепашцы	-0,4138	1	-0,7986
ресурс	-0,0023	-0,7986	1

Ортогональный кратно-масштабный вейвлет-анализ

Осветим теоретические аспекты использования вейвлет-преобразований. Вейвлет-анализ во многом аналогичен методу Фурье, но есть ключевые отличия. Опишем кратко теоретические моменты рассматриваемого подхода. Изложение будет построено на примере самого простого вейвлета, а именно вейвлета Хаара. В рамках данной работы применялись ортогональные вейвлеты, поэтому именно этот подраздел вейвлет-преобразований будет затронут в изложении. Более детально с этим подходом можно ознакомиться в частности в книге [17].

Масштабирующей называется функцией $\varphi(x) \in L^2(R)$, для которой справедливо следующее представление

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in Z} l_k \varphi(2x - k), \quad (1)$$

где для $l_k \in C$, $k \in Z$ выполнено следующее неравенство

$$\sum_{k \in Z} |l_k|^2 < \infty.$$

Для произвольного $i \in Z$ может быть поставлена в соответствие система функций $\varphi_{i,k}(x) = \sqrt{2^i} \varphi(2^i x - k)$, $k \in Z$, которая является ортогональной системой в пространстве $L^2(R)$. Для любого такого $i \in Z$ построенная система функций является базисом некоторого подпространства V_i , причем данная система функций является ортонормированным базисом в этом пространстве. Указанные пространства V_i образуют цепочку бесконечно вложенных подпространств

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \subset V_i \subset \dots$$

Для такой последовательности подпространств справедливы следующие соотношения

$$\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} V_i = \{0\} \quad \text{и} \quad \overline{\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} V_i} = L^2(R). \quad (2)$$

Для произвольного такого пространства V_i можно определить проективный оператор $P_i: L^2(R) \rightarrow V_i$. Чем выше i , тем более точным результат такого проектирования $P_i(f)$ оказывается к исходной функции $f \in L^2(R)$. Результат воздействия оператора P_j на функцию $f \in L^2(R)$ записывается в виде следующего ряда $P_i(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{i,k}) \varphi_{i,k}(x)$, где $(f, \varphi_{i,k})$ – скалярное произведение в $L^2(R)$.

Любое подпространство V_i может быть представлено в виде прямой суммы ортогональных подпространств $V_i = V_{i-1} \oplus W_{i-1}$. Такое разложение дает возможность на i -м уровне приближения представить проектор P_i в виде следующих двух слагаемых $P_i(f) = P_{i-1}(f) + P_{i-1}^W(f)$. В базисах соответствующих подпространств V_{i-1} и W_{i-1} получаем

$$P_i(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{i-1,n} \varphi_{i-1,n}(x) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{i-1,n} \psi_{i-1,n}(x),$$

где $a_{i-1,n} = (f, \varphi_{i-1,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi_{i-1,n}(x)} dx$ – коэффициенты аппроксимации ($i-1$)-го уровня разрешения, $d_{i-1,n} = (f, \psi_{i-1,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\psi_{i-1,n}(x)} dx$ – коэффициенты детализации или детализирующие коэффициенты, $\{\psi_{i-1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – ортонормированный базис подпространства W_{i-1} .

Продолжая данную логику $P_i(f)$ может быть представлен следующим образом

$$P_i(f) = P_{i-1}(f) + P_{i-1}^W(f) = P_{i-2}(f) + P_{i-2}^W(f) + P_{i-1}^W(f).$$

Продолжая такую операцию N раз, имеем

$$P_i(f) = P_{i-k}(f) + \sum_{n=1}^N P_{i-n}^W(f).$$

Алгоритм вейвлет-преобразования может быть разбит на следующие этапы:

I) Выбирается некоторый уровень разложения j , при котором приближение $P_i(f)$ относительно слабо отличается от исходной функции f . Если речь идет о числовой последовательности, то коэффициенты разложения проектора $P_i(f)$ должны быть приравнены значениям данной числовой последовательности.

II) Для выбранной глубины разложения N определяются коэффициенты разложения:

$$\{\{a_{i-N,n}\} \quad \{d_{i-N,n}\} \quad \{d_{i-(N-1),n}\}, \quad \dots, \quad \{d_{i-1,n}\}\}.$$

III) Для восстановления функции $f(x)$ либо последовательности используются возможно скорректированные коэффициенты разложения:

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{j-N,n} \varphi_{j-N,n}(x) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j-N,n} \psi_{j-N,n}(x) + \dots \\ + \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j-1,n} \psi_{j-1,n}(x).$$

Далее на основе такого разложения изучаемые временные ряды будут корректироваться. А именно, коэффициенты детализации соответствующие высоким частотам будут приравниваться нулю. После приравнивания нулю нескольких уровней коэффициентов детализации (т.е. после вычищения «шумов»), первоначальный ряд будет восстановлен, но с учетом осуществленной процедуры.

Вейвлет Хаара

Более подробно как описанный выше алгоритм будет работать в случае применения вейвлета Хаара

Вейвлет Хаара характеризуется следующей масштабирующей функцией:

$$\varphi_H(\tau) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Соотношение (1) для этой функции справедливо, поскольку $\varphi(\tau) = \varphi(2\tau) + \varphi(2\tau - 1) = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2\tau) + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(2\tau - 1))$. Для данной функции $l_0 = l_1 = 1/\sqrt{2}$, при других $n \in Z$, $n \neq 0$ и $n \neq 1$ выполняется $l_n = 0$.

Легко видеть, что для соответствующих пространств V_i , построенных на основе описанной масштабирующей функции, соотношений (2) будут справедливы. Пусть $\{\psi_{i,n}\}_{n \in Z}$ - ортонормированный базис в пространстве W_i . Тогда несложно получить, что

$$\psi_{i,n}(\tau) = \begin{cases} \sqrt{2^i}, & 2^i\tau - n \in [0, \frac{1}{2}) \\ -\sqrt{2^i}, & 2^i\tau - n \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0, & 2^i\tau - n \notin [0, 1) \end{cases}$$

Функции ψ_{i,n_1} и φ_{i,n_2} всегда будут перпендикулярны в пространстве $L^2(R)$ при всех $n_1 \in Z$ и $n_2 \in Z$ ($n_1 \neq n_2$).

Для случая с вейвлетом Хаара правило, в соответствии с которым действует оператор $P_i(f)$ очень простое – на носителе функции $\varphi_{i,n}(\tau)$ (т.е. там где она отличается от нуля) коэффициенты $a_{i,n}$ приравниваются усредненному значению функции f , то есть

$$a_{i,n} = (f, \varphi_{i,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{\varphi_{i,n}(x)} dx = \sqrt{2^i} \int_{n/2^i}^{(n+1)/2^i} f(\tau) d\tau.$$

Точно также находятся коэффициенты для проектора $P_i^W(f)$.

Если речь идет о числовом ряде $\{f_n\}_{n=1}^N$, а не о функции f , то коэффициенты проектора $P_{i-1}(f)$ находятся еще проще, а именно с помощью нахождения арифметического среднего для коэффициентов проектора $P_j(f)$. Другими словами, если в соответствии с пунктом I) описанного выше алгоритма коэффициентами проектора $P_i(f)$ служат первоначальные значения рассматриваемого ряда $\{f_n\}_{n=1}^N$, то коэффициенты проектора $P_{i-1}(f)$ будут

находиться следующим образом (не ограничивая общности будем считать, что N - чётно)

$$\begin{aligned} \{a_{i-1,n}\}_{n=1}^{N/2} &= \left\{ \frac{a_{i,1} + a_{i,2}}{2}, \frac{a_{i,3} + a_{i,4}}{2}, \dots, \frac{a_{i,N-1} + a_{i,N}}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{f_1 + f_2}{2}, \frac{f_3 + f_4}{2}, \dots, \frac{f_{N-1} + f_N}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично, коэффициенты проектора $P_{i-1}^W(f)$ можно найти следующим образом

$$\begin{aligned} \{d_{i-1,n}\}_{n=1}^{N/2} &= \left\{ \frac{a_{i,1} - a_{i,2}}{2}, \frac{a_{i,3} - a_{i,4}}{2}, \dots, \frac{a_{i,N-1} - a_{i,N}}{2} \right\} \\ &= \left\{ \frac{f_1 - f_2}{2}, \frac{f_3 - f_4}{2}, \dots, \frac{f_{N-1} - f_N}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты операторов $P_{i-i}(f)$ и $P_{i-i}^W(f)$ можно найти итерационным методом через коэффициенты проекторов $P_{i-j+1}(f)$.

Обратная операция, а именно операция восстановления коэффициентов оператора $P_{i-j+1}(f)$ осуществляется через коэффициенты операторов $P_{i-j}(f)$ и $P_{i-j}^W(f)$ в соответствии со следующими правилами

$$a_{i-j+1,2n-1} = a_{i-j,n} + d_{i-j,n},$$

$$a_{i-j+1,2n} = a_{i-j,n} - d_{i-j,n}.$$

Вейвлет-анализ временных рядов в модели «кочевников» и «землепашцев»

Применим вейвлет-анализ к данным, полученным с помощью модели «кочевников» и «землепашцев». В частности исследуем временные ряды, отражающие динамику численности популяций землепашцев (рис. 3.24) и кочевников (рис. 3.25), а также динамику количества ресурса (рис. 3.26). Попробуем выявить взаимосвязь между всеми этими временными рядами. К данным временным рядам будут применены вейвлет-преобразования на основе различных вейвлетов, будет осуществлено сравнение полученных результатов, после чего постараемся выбрать вейвлет, дающий лучшие результаты. На первом

этапе предположим, что численность землепашцев главным образом в каждый момент времени зависит от численности кочевников, а также текущего количества ресурса на ареале. Дополнительно предположим, что такая зависимость носит линейный характер. Проведем регрессионный анализ следующей модели:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x1_t + \beta_2 x2_t + \varepsilon_t.$$

где y_t – численность землепашцев в каждый момент времени t , $x1_t$ – численность кочевников в период времени t , $x2_t$ – количество ресурса на ареале в период времени t . Как уже было отмечено, длина временных рядов составляет 20000 периодов. Метод наименьших квадратов дал следующие результаты:

	<i>Оценки коэффициентов</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P- Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>Верхние 95%</i>
β_0	2527,8	5,8152	434,69	0	2516,371	2539,167
β_1	-2,207	0,0162	-136,5	0	-2,2391	-2,1757
β_2	-3,251	0,0124	-261,9	0	-3,2756	-3,2269

Коэффициент детерминации (R^2): 0,81, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,94.

Коэффициент детерминации построенной модели достаточно большой, но статистика Дарбина-Уотсона принимает значения, которые свидетельствуют о наличии положительной автокорреляции первого порядка. Высокий R^2 свидетельствует о хорошей объясняющей способности модели, однако наличие автокорреляции ошибок мешает использовать данную модель для прогнозирования. Более того, был проведен более глубокий анализ, который показал наличие автокорреляции ошибок более высоких порядков чем один.

На следующем этапе к рассматриваемым временным рядам применим вейвлет-анализ, после чего снова осуществим оценку данной регрессионной модели, но уже на новых, модифицированных данных.

Применив вейвлет-преобразования к нашим временным рядам, высокочастотные коэффициенты детализации приравняем нулю. Далее с учетом

проделанной операции, как было описано чуть выше, восстановим исходные ряды. На основе полученных рядов заново осуществим оценку регрессионной модели.

Применим вейвлет Хаара, как самый простой из вейвлетов. Глубину разложения возьмем на уровне $N=4$.

На первом шаге нулю будут приравнены коэффициенты детализации первого уровня $\{d_{i-1,n}\}_{n \in Z} = 0$. Далее приравняем нулю коэффициенты детализации первого и второго уровней $\{d_{i-1,n}\}_{n \in Z} = 0$ и $\{d_{i-2,n}\}_{n \in Z} = 0$. На следующем шаге обнулены будут коэффициенты детализации первого, второго и третьего уровня $\{d_{i-1,n}\}_{n \in Z} = 0$, $\{d_{i-2,n}\}_{n \in Z} = 0$ и $\{d_{i-3,n}\}_{n \in Z} = 0$. Далее нулю приравняем все коэффициенты детализации.

Приравняв коэффициенты детализации на первом уровне $\{d_{i-1,n}\}_{n \in Z} = 0$, восстанавливаем исходный временной ряд после чего можно получить обновленные оценки исходной регрессионной модели

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \varepsilon_t.$$

Результаты оценок регрессии следующие:

	<i>Оценки</i>	<i>Стандартная</i>	<i>t-</i>	<i>P-</i>	<i>Нижние</i>	<i>Верхние</i>
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>статистика</i>	<i>Значение</i>	<i>95%</i>	<i>95%</i>
β_0	2615,4	5,127	510,1	0	2605,3	2656,4
β_1	-2,208	0,01396	-158,2	0	-2,236	-2,181
β_2	-3,496	0,01111	-314,6	0	-3,517	-3,474

Коэффициент детерминации (R^2): 0,86, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,46.

В случае, когда нулю приравнены коэффициенты детализации первого и второго уровня, восстановление исходных рядов и оценка соответствующей регрессии дает следующий результат:

	<i>Оценки</i>	<i>Стандартная</i>	<i>t-</i>	<i>P-</i>	<i>Нижние</i>	<i>Верхние</i>
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>статистика</i>	<i>Значение</i>	<i>95%</i>	<i>95%</i>
β_0	2675,6	4,548	588,3	0	2666,7	2684,5
β_1	-2,209	0,01222	-180,8	0	-2,233	-2,185
β_2	-3,663	0,00995	-368,0	0	-3,683	-3,644

Коэффициент детерминации (R^2): 0,89, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,22.

Далее, приравняв дополнительно коэффициенты детерминации на третьем уровне, имеем:

	<i>Оценки</i>	<i>Стандартная</i>	<i>t-</i>	<i>P-</i>	<i>Нижние</i>	<i>Верхние</i>
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>статистика</i>	<i>Значение</i>	<i>95%</i>	<i>95%</i>
β_0	2718,9	4,049	671,5	0	2710,9	2726,8
β_1	-2,210	0,01079	-204,8	0	-2,231	-2,4734
β_2	-3,784	0,008921	-424,1	0	-3,801	-3,766

Коэффициент детерминации (R^2): 0,92, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,095.

На заключительном этапе получаем:

	<i>Оценки</i>	<i>Стандартная</i>	<i>t-</i>	<i>P-</i>	<i>Нижние</i>	<i>Верхние</i>
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>статистика</i>	<i>Значение</i>	<i>95%</i>	<i>95%</i>
β_0	2747,8	3,665	749,8	0	2740,6	2755,0
β_1	-2,213	0,009741	-227,2	0	-2,232	-2,194
β_2	-3,863	0,008114	-476,1	0	-3,879	-3,847

Коэффициент детерминации (R^2): 0,93, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,045.

Из представленных результатов видно, что с каждым следующим шагом коэффициент детерминации R^2 растет, при этом статистика Дарбина-Уотсона падает. Рост R^2 свидетельствует об увеличении объясняющей способности данной модели, построенной на соответствующих данных, уменьшение статистики Дарбина-Уотсона говорит о росте положительной автокорреляции ошибок.

Повторим продемонстрированную последовательность действий, только вместо вейвлета Хаара используем другой вейвлет.

В качестве одного из следующих вейвлетов возьмем вейвлет Добеши порядка 2. Глубину разложения также возьмем на уровне $N=4$. Приравняв нулю на первом шаге коэффициенты детализации и восстановив исходный ряд, получаем

	<i>Оценка</i> <i>коэффициентов</i>	<i>Стандартная</i> <i>ошибка</i>	<i>t-</i> <i>статистика</i>	<i>P-</i> <i>Значение</i>	<i>Нижние</i> <i>95%</i>	<i>Верхние</i> <i>95%</i>
β_0	2612,5	5,152	507,1	0	2602,4	2622,6
β_1	-2,209	0,01403	-157,4	0	-2,4975	-2,4734
β_2	-3,487	0,0112	-312,5	0	-3,509	-3,465

Коэффициент детерминации (R^2): 0,86, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,40.

На следующем шаге, когда приравнены нулю коэффициенты детализации первого и второго уровней $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$ и $\{d_{j-2,k}\}_{k \in Z} = 0$ получаем следующий результат регрессионных оценок:

	<i>Оценка</i> <i>коэффициентов</i>	<i>Стандартная</i> <i>ошибка</i>	<i>t-</i> <i>статистика</i>	<i>P-</i> <i>Значение</i>	<i>Нижние</i> <i>95%</i>	<i>Верхние</i> <i>95%</i>
β_0	2675,4	4,551	587,8	0	2666,5	2684,3
β_1	-2,209	0,01222	-180,7	0	-2,233	-2,185
β_2	-3,663	0,00996	-367,8	0	-3,683	-3,644

Коэффициент детерминации (R^2): 0,89, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,13.

Далее, при $\{d_{j-1,k}\}_{k \in Z} = 0$, $\{d_{j-2,k}\}_{k \in Z} = 0$ и $\{d_{j-3,k}\}_{k \in Z} = 0$, результаты будут следующими

	<i>Оценка</i>	<i>Стандартная</i>	<i>t-</i>	<i>P-</i>	<i>Нижние</i>	<i>Верхние</i>
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>статистика</i>	<i>Значение</i>	<i>95%</i>	<i>95%</i>
β_0	2716,4	4,084	665,1	0	2708,4	2724,4
β_1	-2,208	0,01088	-202,9	0	-2,220	-2,187
β_2	-3,78	0,008994	-420,1	0	-3,796	-3,760

Коэффициент детерминации (R^2): 0,92, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,04.

На заключительном этапе, в случае когда все коэффициенты детализации приравнены нулю, получаем

	<i>Оценка</i>	<i>Стандартная</i>	<i>t-</i>	<i>P-</i>	<i>Нижние</i>	<i>Верхние</i>
	<i>коэффициентов</i>	<i>ошибка</i>	<i>статистика</i>	<i>Значение</i>	<i>95%</i>	<i>95%</i>
β_0	2743,5	3,7342	734,7	0	2736,2	2750,8
β_1	-2,21	0,009916	-223,1	0	-2,232	-2,193
β_2	-3,851	0,00826	-466,4	0	-3,868	-3,835

Коэффициент детерминации (R^2): 0,93, Статистика Дарбина-Уотсона (DW): 0,01.

Видно, что динамика показателей R^2 и статистики Дарбина-Уотсона такая же, как и в случае с вейвлетом Хаара, то есть по мере того, как все больше коэффициентов детализации приравнивается нулю коэффициент детерминации растет, тогда как статистика Дарбина-Уотсона падает. При использовании других вейвлетов картина качественно повторяется. Иными словами объясняющая способность регрессионной модели растет одновременно с этим ситуация с автокорреляцией ошибок только усугубляется. Наличие автокорреляции ошибок не позволяет использовать полученные модели для прогнозирования.

Отметим также, что если сравнивать коэффициенты детерминации, которые получились в результате применения различных вейвлетов, то можно наблюдать примерно одинаковые результаты. Если одновременно с этим еще учитывать статистику Дарбина-Уотсона, то среди всех вейвлетов можно выделить вейвлет Хаара. Следовательно, рассматриваемые временные ряды не имеют

шаблонных схожих по форме и периодически повторяющихся помех, которые можно было бы убрать, применив наиболее подходящий вейвлет.

Выводы

Из представленных результатов видно, что применение вейвлет-анализа действует в двух направлениях. С одной стороны наблюдается увеличение коэффициента детерминации, с другой статистика Дарбина-Уотсона ухудшается. Значения статистики Дарбина-Уотсона близкие к нулю свидетельствуют о наличии положительной автокорреляции ошибок в построенных регрессионных моделях, это не позволяет использовать данные модели для прогнозирования. Однако после применения вейвлет-преобразования для этих моделей характерна более высокие значения коэффициента детерминации что означает более высокую объясняющую способность этих моделей и позволяет более четко понимать характер зависимости исследуемых показателей. Отметим, что наличие автокорреляции ошибок не влияет на несмещенность и состоятельность регрессионных оценок β_0 , β_1 и β_2 . Одно из объяснений почему наблюдается автокорреляция ошибок состоит в том, что регрессионные модели учитывают не все факторы, влияющие на численность землепашцев.

Из этого следует, что в каждый период времени численность кочевников и количество ресурса на ареале достаточно хорошо объясняют численность землепашцев. Тем не менее, численность кочевников и количество ресурса несут в себе не всю информацию для того, чтобы можно было предсказывать численности землепашцев. В результате проведения вейвлет-преобразований над исходными временными рядами положение дел не меняется, а скорее даже ухудшается.

Более детальное изучение ситуации подсказывает, что кроме количества кочевников и ресурса на ареале на численность землепашцев свое влияние могут также оказывать и другие факторы, среди которых могут быть доля культурного и дикого ресурсов, возраст особей. Кроме этого воздействие на зависимую

переменную могут оказывать не только количественные, но и качественные характеристики, среди которых могут быть скажем взаимное расположение агентов на ареале. Такие характеристики не просто измерить измерить и соответственно сложно включить в регрессионную модель. В реальном мире, если рассматривать скажем далекое прошлое, то численность условных «кочевники» и численность условных «землепашцы» были взаимосвязаны друг с другом. Однако осуществить предсказание одной характеристики по другой вряд ли возможно, поскольку всегда существуют факторы, которые очень трудно учесть, а также дать им количественную характеристику (к примеру фактор личности в истории).

Заключение

В рамках диссертационного исследования были получены следующие результаты:

- 1. Разработаны имитационные модели, являющиеся модификациями модели Соле-Манрубия. Определены условия, при которых наблюдается эффект вымирания популяций в этих моделях.**

В модификации с введенным фактором мести вымирание популяции наблюдаются во всех проведенных экспериментах. В модели с введенной асимметрией во взаимоотношениях между агентами определено значение параметра асимметрии, при котором за отведенной в рамках экспериментов время можно наблюдать вымирание популяции.

- 2. На основе модели Соле-Манрубия построена её экономическая модификация, роль агентов в которой выполняют экономические субъекты – домохозяйства и фирмы.**

Проведена серия экспериментов, построена частота разорений экономических субъектов. Показано, что в замкнутом экономическом пространстве возможны ситуации, при которых кризисы (одновременное разорение большого числа агентов) могут наступать не только в результате некоторого внешнего воздействия, но и за счет внутренних причин.

- 3. Разработана агент-ориентированная социально-экономическая модель, агенты которой наделены большей субъектностью в процессе принятия решений.**

Построена агент-ориентированная модель, в которой взаимодействие между агентами построено на основе конкурентной борьбы за ограниченный ресурс. Проведена серия экспериментов, выявлены области параметров модели, при которых наблюдается вымирание рассматриваемой популяции, а также области параметров, при которых популяция выживает за отведенное в рамках экспериментов время.

4. Разработана агент-ориентированная социально-экономическая модель с неоднородной социальной структурой – модель «кочевников» и «землепашцев». Представлены различные модификации данной модели.

Проведена серия экспериментов, определены области параметров, при которых за отведенное время происходит исчезновение одного из видов агентов, а также области параметров, при которых можно наблюдать сосуществование на едином ареале обоих видов агентов. Выявлена пространственная локализация кочевников и землепашцев. Приведена модификация этой модели, которая учитывает ограничения агентов на способность перемещаться по ареалу. Проведен анализ этой модификации, который показал, что данное ограничение положительно влияет на землепашцев и оказывает негативное влияние на кочевников. Проведен количественный анализ влияния этого ограничения.

5. Представлен статистический, регрессионный и вейвлет-анализ данных, полученных в результате осуществления серии экспериментов модели «кочевников» и «землепашцев».

Осуществлена проверка статистической гипотезы о наличии инварианта, характеризующего неизменность плотности заселения агентов каждого из типов по отношению к изменению размеров ареала. Представлена серия регрессионных моделей, с помощью которых выявлена зависимость некоторых характеристик модели от ряда параметров модели. В частности, показана линейная связь усредненной численности землепашцев и кочевников от размеров ареала. Также представлен вейвлет-анализ временных рядов динамики численности каждого из видов, а также количества ресурса на ареале обитания в каждый момент времени. Определена функциональная линейная зависимость между этими временными рядами, благодаря применению вейвлет-анализа объясняющая способность построенной регрессионной модели была повышена.

Главная идея диссертационной работы заключается в изучении каждого из рассмотренных в работе эффектов в отдельности, для получения четкого понимания какой эффект приводит к каким результатам. В качестве альтернативного пути для изучения поставленных вопросов можно было бы предложить с самого начала строить достаточно сложные модели общества, возможно более приближенные к реальному современному либо существовавшему ранее обществу, и изучать такие модели. По такому пути пошли авторы работ, в которых рассматривались цивилизация Маяя [21], племена охотников и собирателей (hunter-gatherer groups), обитавших в северном Гуджарате (Индия) [26], а также авторы многих других моделей [22, 23, 27]. При построении сложной модели формализация многих аспектов в такой модели часто носит спорный характер и зачастую имеется множество равноценных с точки зрения здравого смысла альтернатив для такой формализации. Если модель действительно сложная, то таких спорных моментов в ней может оказаться достаточно много. В итоге, когда модель построена и в ней наблюдается какой-то интересный эффект, не всегда можно понять, этот эффект носит объективный характер, отражающий суть моделируемого процесса, либо этот эффект носит субъективный характер, обусловленный особенностями выбранной формализации, и суть моделируемого процесса не отражает. Кроме этого модель, в которых сделана попытка учесть очень много факторов, может оказаться сложным объектом для исследования, поскольку те или иные наблюдаемые эффекты будут следствием наложения многих факторов, из-за чего выявление влияния каждой из таких факторов в отдельности может оказаться неподъемной задачей. В связи с этим стратегия, выбранная в рамках данной диссертационной работы, заключается в движении от самых простых моделей (моделей типа Соле-Монрубия) к более сложным (модель «кочевников» и «землеашцев»), в этом случае новые эффекты, возникающие при каждом новом усовершенствовании модели будут достаточно легко вычленимы и анализируемы. Понятно, что проделанные в рамках данной диссертационной работы шаги могут рассматриваться как первые шаги в достаточно долгом и интересном

исследовании на пути дальнейшего усовершенствования моделей и более глубокого понимания процессов, происходящих в сообществах с более сложной социальной организацией.

Литература

1. David M. Raup Biological Extinction in Earth History. Science 231, p. 1528-1533 (1986)
2. Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/f Noise. Physical Review Letters. 59(4), p. 381-384. (1987)
3. Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-Organized Criticality. Physical Review A. 38(1). p. 364-374. (1988)
4. Richard V. Sole and Susanna C. Manrubia. Extinction and self-organized criticality in a model of large-scale evolution. Physical Review E. 54(1). p. R42-R45. (1996)
5. Henning P. A. Computational evolution. Lecture notes in economics and mathematical systems ser., 2008. p. 175-193.
6. Andrew Adamatzky. Game of Life Cellular Automata. — Springer-Verlag London, 2010.
7. Epstein J., Axtell R. Growing artificial societies: Social science from the bottom up. Washington, D.C.: Brookings Institution Press, 1996. 223 p.
8. Айвазян С.А., Методы эконометрики. М.:Магистр: ИНФРА-М, 2010. -512 с.
9. Макаров В.Л., Бекларян Л.А., Белоусов Ф.А. Установившиеся режимы в модели Хенинга и ее модификациях. // Машинное обучение и анализ данных. 2014. Т. 10. с. 1385-1395.
10. Белоусовы Ф.А. Модель сообществ с двумя способами воспроизводства продукта (модель «кочевников» и «землеашцев»). // Экономика и математические методы. 2017. Т. 53. № 3. –с. 31-38.
11. Белоусов Ф.А. Анализ модели Хенинга. Ее модификации. // «Аудит и Финансовый Анализ», №1, 2014. -с.319-323.

12. Белоусов Ф.А. Вейвлет-анализ временных рядов в модели кочевников и земледельцев. // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий (ISSN 2226-910X), М.: Воронежский государственный университет инженерных технологий, Том 80, №1. –с. 288-297.
13. Белоусов Ф.А. Исследование цивилизаций с двумя различными способами воспроизводства продукта. Агент-ориентированная модель «кочевников» и «земледельцев». Вестник ЦЭМИ РАН. 2018.
14. Астафьев Н.М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения // Успех физических наук. 1998. Т.166. № 11. -с. 1145-1170.
15. Киселев А. Непрерывные вейвлет-преобразования в анализе бизнес-информации. URL: <https://basegroup.ru/community/articles/wavelet-applications>
16. Огородов А.П. Применение теории вейвлет-преобразований в исследовании финансовых временных рядов. // Электроника информационные технологии. 2009. № 2(7). URL: http://fetmag.mrsu.ru/2009-3/pdf/Financial_transient_series.pdf
17. Алексеев В.И. Анализ и прогнозирование циклических временных рядов с использованием вейвлетов и нейросетевых нечетких правил вывода // В.И. Алексеев. – Югра: Вестник ЮГУ, 2013. –Выпуск № 3. с. 3-10.
18. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
19. Тоинби Арнольд, Постигание истории. М.:Прогресс, 1991. – 736 с.
20. Гумилев Л.Н. Этногenez и биосфера Земли. СПб.: Кристалл, 2001. – 642 с.
21. Scott Heckbert, MayaSim: An Agent-Based Model of the Ancient Maya Social-Ecological System. Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2013. 16 (4) 11 URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/16/4/11.html>
22. Kohler T.A., C.D. Jonson, M. Varien, S. Ortman, R. Reynolds, Z. Kobti, J. Cowan, K. Kolm, S. Smith, and L. Yap. Settlement ecodynamics in the prehispanic central

Mesa Verde region. The model-based archaeology of socionatural systems, p. 61-104, 2007.

23. Wilkinson T. J., M. Gibson, J. H. Christiansen, M. Widell, D. Schloen, N. Koutchoukos, C. Woods, J. Sanders, K.-L. Simunich, M. Altaweel, J. A. Ur, C. Hritz, J. Lauinger, T. Paulette, and J. Tenney. Modeling settlement systems in a dynamic environment // The model-based archaeology of socionatural systems. p. 175-208. 2007.

24. Ricardo Anders Guzman, Sammy Drobny, Carlos Rodriguez-Sickert. The Ecosystems of Simple and Complex Societies: Social Geographical Dynamics 2018. 21 (4) 10. URL: <http://jasss.soc.surrey.ac.uk/21/4/10.html>

25. Wittek P., Rubio-Campillo X. Scalable agent-based modeling with cloud HPC resources for social simulations // IEEE 4th International Conference on Cloud Computing Technology and Science (CloudCom) December 3-6. Taipei, Taiwan, 2012. p. 355-362.

26. Balbo A.L., Rubio-Campillo, X., Rondelli B., Ramirez M., Lancelotti C., Torrano A., Salpeteur M., Lipovetzky N., Reyes-Garcia V., Montanola C., Madella M. Agent-Based Simulation of Holocene Monsoon Precipitation Patterns and Hunter-Gather Population Dynamics in Semi-arid Environments // Journal of Archaeological Method and Theory. 2014, Volume 21, Issue 2, pp 426-446.

27. Santos J.I., Pereda M., Zurro D., Alvares M., Caro J., Galen J.M., Godino I.B., Effect of Resource Spatial Correlation and Hunter-Fisher-Gatherer Mobility on Social Cooperation in Tierra del Fuego // PLOS ONE (2015), 10(4), e0121888.

28. Rubio-Campillo X. (2015) Large Simulations and Small Societies: High Performance Computing for Archaeological Simulations. In: Wurzer G., Kowarik K., Reschreiter H. (eds) Agent-based Modeling and Simulation in Archaeology. Advances in Geographic Information Science. Springer, Cham.

29. Verhulst, P. F., (1838). Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance mathématique et physique 10:113-121

30. Базыкин А.Д., Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 181 с.
31. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций, Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 368 с.
32. Разжевайкин В.Н. Анализ моделей динамики популяций, М.: МФТИ, 2010, 196 с.
33. Бродский Ю.И. Колебания в многомерных нечетных конкурентных системах // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. 2010. Т.25. №1(25). С.7-24.
34. Великолепие исчезнувших цивилизаций. Под общей ред. Ф. Бурбона и Валерии М. де Фабианис, М.: БММ АО, 2001. -352 с.
35. Ко Майкл. Майя. Исчезнувшая цивилизация: легенды и факты. Издательство: Центрполиграф. 2007. ISBN: 978-5-9524-2806-5.
36. Чарльз Галленкамп. Майя. Загадка исчезнувшей цивилизации. М.: Наука. 1966.
37. Bahn, P.G., Flenley, J., Easter Island, Earth Island. Thames and Hudson, New York, 1992.
38. Eric H. Cline. 1177 B.C. The Year that Civilization Collapsed. Princeton University Press, 2014.
39. Ronald J. Daniels, Donald F. Kettl, Howard Kunreuther. On Risk and Disaster: Lessons from Hurricane Katrina, University of Pennsylvania Press, 2006.
40. Oliver Dickinson. The Aegean from Bronze Age to Iron Age: Continuity and Change Between the Twelfth and Eight Centuries, BCRoutlaffe, 2007 ISBN 978-0-415-13590-0.

41. Diamond, J. (2005) *Collapse: How Societies Choose to Fail or Succeed*. Viking, New York, — p. 118.